TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 347, Number 11, November 1995

UNIFORMISATIONS PARTIELLES ET CRITÈRES À LA HUREWICZ DANS LE PLAN

DOMINIQUE LECOMTE

RÉSUMÉ: On donne des caractérisations des boréliens potentiellement d'une classe de Wadge donnée, parmi les boréliens à coupes verticales dénombrables d'un produit de deux espaces polonais. Pour ce faire, on utilise des résultats d'uniformisation partielle.

Cet article fait suite à l'étude des classes de Wadge potentielles commencée dans **[Le1]**. On démontre entre autres les résultats annoncés dans **[Le2]**. Je renvoie le lecteur à **[Ku]** pour ce qui est des notions de base en topologie, et à **[W]** pour ce qui concerne les classes de Wadge. On utilisera les notations et notions standard de la théorie descriptive des ensembles, ainsi que des notions de théorie descriptive effective, qui peuvent être trouvées dans **[Mo]**. Rappelons les définitions de base :

Définitions. (a) Soit Γ une classe de parties d'espaces polonais de dimension 0. On dit que Γ est une classe de Wadge de boréliens s'il existe un espace polonais P_0 de dimension 0, et un borélien A_0 de P_0 tels que pour tout espace polonais P de dimension 0 et pour toute partie A de P, A est dans Γ si et seulement s'il existe une fonction continue f de P dans P_0 telle que $A = f^{-1}(A_0)$.

(b) Soient X et Y des espaces polonais, et A un borélien de $X \times Y$. Si Γ est une classe de Wadge, on dira que A est potentiellement dans Γ (ce qu'on notera $A \in pot(\Gamma)$) s'il existe des topologies polonaises de dimension 0, σ (sur X) et τ (sur Y), plus fines que les topologies initiales, telles que A, considéré comme partie de $(X, \sigma) \times (Y, \tau)$, soit dans Γ.

La motivation pour l'étude de ces classes de Wadge potentielles trouve son origine dans l'étude des relations d'équivalence boréliennes (ou plus généralement des structures boréliennes à plusieurs variables). Par exemple, dans **[HKL]**, on étudie le pré-ordre qui suit. Si E (resp. E') est une relation d'équivalence borélienne sur l'espace polonais X (resp. X'), on pose:

$$E \leq E' \Leftrightarrow [\text{il existe } f \text{ borélienne de } X \text{ dans } X' \text{ telle que } xEy \Leftrightarrow f(x)E'f(y)\,].$$

En d'autres termes, l'application f définit par passage au quotient une injection de X/E dans X'/E', ce de manière borélienne. La relation $E \leq E'$ peut s'écrire : $E = (f \times f)^{-1}(E')$, avec f borélienne ; or si E' est de classe de Wadge Γ (ou même de classe de Wadge potentielle Γ), il est facile de vérifier

Received by the editors January 18, 1994 and, in revised form, December 15, 1994.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 54H05; Secondary 03D80, 03E15, 04A15, 26A21, 28A05, 54C65, 54E52.

que E est de classe de Wadge potentielle Γ (alors que E n'est pas de classe Γ en général). La classe de Wadge potentielle est donc un invariant naturel du pré-ordre $\leq$. Bien que cet invariant soit en général grossier, il fournit des informations sur $\leq$; par exemple, dans **[Lo1]**, A. Louveau montre que la classe des relations d'équivalence $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ n'est pas co-finale dans les relations d'équivalence boréliennes pour le pré-ordre $\leq$, en utilisant la notion de classe de Wadge potentielle. Il en déduit une démonstration simple de la non-existence d'une relation d'équivalence borélienne maximum pour $\leq$. Ce résultat avait par ailleurs été démontré antérieurement par H. Friedman et L. Stanley, en utilisant les travaux de H. Friedman sur la diagonalisation borélienne.

L'un des principaux résultats concernant les classes de Wadge de boréliens est l'existence de "tests d'Hurewicz", dont le principe est : un borélien n'est pas d'une classe de Wadge donnée si et seulement s'il est au moins aussi compliqué qu'un exemple type n'étant pas de cette classe. Hurewicz a démontré l'existence du test pour la classe G_δ. Le résultat précis est le :

Théorème 2.10. *Soit X un espace polonais, et A un borélien de X. Alors A n'est pas G_δ si et seulement s'il existe E dénombrable sans point isolé tel que $\overline{E} \setminus E \approx \omega^\omega$ et $E = A \cap \overline{E}$.*

Après les travaux de nombreux auteurs, parmi lesquels J. R. Steel (voir **[S]**), ainsi que A. Louveau et J. Saint Raymond, l'existence de tests a été établie pour toutes les classes de Wadge ; dans **[Lo-SR]**, il est démontré :

Théorème. *Si ξ est un ordinal dénombrable non nul, il existe un compact P_ξ de dimension 0 et un vrai $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ de P_ξ, A_ξ, tels que si A est un borélien de l'espace polonais X, on ait : A n'est pas $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ de X si et seulement s'il existe $f : P_\xi \longrightarrow X$ injective continue telle que $A_\xi = f^{-1}(A)$.*

L'ensemble A_ξ est dit "test d'Hurewicz". Un des objectifs de cet article est d'étudier la possibilité d'obtenir des résultats similaires, pour les classes de Wadge potentielles. Dans **[Le1]**, il est démontré un lemme qui suggère l'intérêt qu'on pourrait avoir à étudier les problèmes d'uniformisation partielle, en vue de caractériser les ensembles potentiellement fermés. Le test usuel pour savoir si un ensemble A est fermé est de prendre une suite convergente de points de A et de regarder si la limite est dans A. Un tel test ne peut pas convenir pour caractériser les ensembles potentiellement fermés, puisqu'un singleton peut être rendu ouvert-fermé tout en gardant des topologies polonaises. Cependant, on remarque que lorsqu'on raffine la topologie d'un espace polonais, tout en gardant une topologie polonaise, les deux topologies coïncident sur un G_δ dense pour la topologie initiale. D'où l'idée de remplacer les points par des graphes de fonctions continues et ouvertes, objets qui rencontrent tout produit de deux G_δ denses si les domaines et images des fonctions sont assez "gros".

Lemme. *Soient X et Y des espaces polonais, (C_n) (resp. (D_n)) des suites d'ouverts non vides de X (resp. Y), $f_n : C_n \longrightarrow D_n$ continues et ouvertes, $B := \bigcup_{n\in\omega\setminus\{0\}} Gr(f_n)$, et A un borélien de $X \times Y$ contenant B ; si $\overline{B} \setminus A$ contient $Gr(f_0)$, alors A est non-$pot(\mathbf{\Pi}^0_1)$.*

La question est de savoir s'il y a une réciproque. Nous allons voir que c'est en partie le cas : cette réciproque a lieu, modulo un changement de topologies, si A est à la fois $pot(\mathbf{\Sigma}_3^0)$ et $pot(\mathbf{\Pi}_3^0)$, à ceci près qu'on ne peut pas imposer le sens dans lequel se trouvent les graphes. Ceci signifie que les fonctions partielles peuvent être définies sur une partie de X et arriver dans Y, ou être définies sur une partie de Y et arriver dans X. Le résultat précis est un cas particulier du théorème 2.3 ; si f_n est une fonction partielle de X dans Y ou de Y dans X, on notera G_n la partie de $X \times Y$ égale au graphe de f_n si f_n va de X dans Y, et égale à $\{(x, y) \in X \times Y \ / \ x = f_n(y)\}$ sinon.

Théorème *. *Soient X et Y des espaces polonais, et A un borélien $pot(\mathbf{\Sigma}_3^0) \cap pot(\mathbf{\Pi}_3^0)$ de $X \times Y$. A est non-$pot(\mathbf{\Pi}_1^0)$ si et seulement s'il existe des espaces polonais Z et T parfaits de dimension 0, des ouverts-fermés non vides A_n et B_n (l'un dans Z et l'autre dans T, pour n dans ω), des surjections continues ouvertes f_n de A_n sur B_n, et des injections continues u et v tels que $\bigcup_{n>0} G_n \subseteq (u \times v)^{-1}(A)$, $G_0 \subseteq (u \times v)^{-1}(\check{A})$, et $G_0 = \overline{\bigcup_{n>0} G_n} \setminus (\bigcup_{n>0} G_n)$.*

Le théorème 2.3 étend ce résultat à la caractérisation des boréliens potentiellement différence transfinie d'ouverts, toujours parmi les boréliens $pot(\mathbf{\Sigma}_3^0) \cap pot(\mathbf{\Pi}_3^0)$. On ne se ramène donc pas à un exemple type, comme dans le théorème de A. Louveau et J. Saint Raymond, mais à une situation type. Pour démontrer le théorème 2.3, l'outil essentiel est le :

Théorème 1.13. *Soient X et Y des espaces polonais parfaits de dimension 0, A un G_δ l.p.o. non vide de $X \times Y$. Alors il existe des ensembles presque-ouverts non vides F et G, l'un contenu dans X et l'autre dans Y, et une surjection continue ouverte de F sur G dont le graphe est contenu dans A ou dans $\{(y, x) \in Y \times X \ / \ (x, y) \in A\}$ selon le cas.*

Pour le comprendre voici les :

Définitions 1.2. (a) Un G_δ d'un espace topologique est dit presque-ouvert (ou p.o.) s'il est contenu dans l'intérieur de son adhérence (ce qui revient à dire qu'il est dense dans un ouvert).

(b) Si X et Y sont des espaces topologiques, une partie A de $X \times Y$ sera dite localement à projections ouvertes (ou l.p.o.) si pour tout ouvert U de $X \times Y$, les projections de $A \cap U$ sont ouvertes.

Les ensembles l.p.o. se rencontrent par exemple dans la situation suivante : A est Σ_1^1 dans un produit de deux espaces polonais récursivement présentés. Si on munit ces deux espaces de leur topologie de Gandy-Harrington (celle engendrée par les Σ_1^1), A devient l.p.o. dans le nouveau produit. C'est essentiellement dans cette situation qu'on utilisera cette notion, au cours de la section 2.

On étudie donc dans un premier temps, et plus largement que nécessaire pour la seule étude des classes de Wadge potentielles, les problèmes d'uniformisation partielle, sur des ensembles "gros" au sens de la catégorie, en essayant d'obtenir l'image de la fonction "grosse" également. On obtient essentiellement des résultats pour les G_δ. Il est à noter que malgré des hypothèses symétriques, la conclusion du théorème 1.13 ne l'est pas.

Dans [O], il est démontré, sous l'hypothèse du continu, l'existence d'une bijection Φ de $[0, 1]$ sur lui même échangeant ensembles maigres et ensembles de mesure de Lebesgue nulle. En étudiant un exemple où on trouve un graphe dans un sens et pas dans l'autre, dans le théorème 1.13, on montre qu'une telle application Φ ne peut pas avoir de propriété de mesurabilité projective (corollaire 1.8).

Une autre façon de formuler le théorème * est (voir **[Le2]**) :

Théorème. *Soient* X *et* Y *des espaces polonais,* A *un borélien de* $X \times Y$ *à coupes verticales dénombrables. Alors* A *est non-*$pot(\mathbf{\Pi}_1^0)$ *si et seulement s'il existe des espaces polonais* Z *et* T *parfaits de dimension 0 non vides, des fonctions continues* u *et* v, *des ouverts denses* (A_n) *de* Z, *des applications continues ouvertes* f_n *de* A_n *dans* T, *tels que pour tout* x *dans* $\bigcap_{n\in\omega} A_n$, $(f_n(x))_{n>0}$ *converge simplement vers* $f_0(x)$, $Gr(g_0) \subseteq (u \times v)^{-1}(\check{A})$ *et* $\bigcup_{n>0} Gr(g_n) \subseteq (u \times v)^{-1}(A)$.

En d'autres termes, en chaque point du G_δ dense $\bigcap_{n\in\omega} A_n$, on retrouve sur la fibre le test usuel pour les fermés. On a un phénomène analogue pour les G_δ.

Théorème 2.11. *Soient* X *et* Y *des espaces polonais,* A *un borélien de* $X \times Y$ *à coupes verticales dénombrables. Alors* A *est non-*$pot(\mathbf{\Pi}_2^0)$ *si et seulement s'il existe des espaces polonais* Z *et* T *parfaits de dimension 0 non-vides, des injections continues* u *et* v, *des ouverts denses* (A_n) *de* Z, *des applications continues et ouvertes* f_n *de* A_n *dans* T, *tels que pour tout* x *dans* $\bigcap_{n\in\omega} A_n$, *l'ensemble* $E_x := \{f_n(x) \ / \ n \in \omega\}$ *soit sans point isolé,* $\overline{E_x} \setminus E_x \approx \omega^\omega$, *et* $E_x = (u \times v)^{-1}(A)_x \cap \overline{E_x}$.

1. Uniformisation partielle des G_δ

Les problèmes d'uniformisation partielles ont déjà été étudiés dans **[GM]**, où au lieu de considérer la catégorie, il est question d'ensembles de mesure 1 sur chacun des facteurs. Les résultats qu'on obtient sont également à rapprocher de résultats obtenus par G. Debs et J. Saint Raymond, où il est question de fonctions totales et injectives, avec des hypothèses de compacité sur chacun des facteurs (cf. **[D-SR]**). Plus précisément, il est démontré dans **[GM]** le résultat suivant :

Théorème 1.1. *Soient* X *et* Y *des espaces polonais,* λ (*resp.* μ) *une mesure de probabilité sur* X (*resp.* Y), *et* A *un borélien de* $X \times Y$ *ayant ses coupes horizontales* (*resp. verticales*) *non dénombrables* μ*-presque partout* (*resp.* λ*-presque partout*). *Alors il existe un borélien* F *de* X (*resp.* G *de* Y) *tels que* $\lambda(F) = \mu(G) = 1$, *et un isomorphisme borélien de* F *sur* G *dont le graphe est contenu dans* A.

On peut se demander si on a un résultat analogue en remplaçant "ensemble de mesure 0" par "ensemble maigre". On va voir que non. Pour ce faire on montre un lemme que nous réutiliserons.

Définitions 1.2. (a) Un G_δ d'un espace topologique est dit presque-ouvert (ou p.o.) s'il est contenu dans l'intérieur de son adhérence (ce qui revient à dire qu'il est dense dans un ouvert).

(b) Si X et Y sont des espaces topologiques, une partie A de $X \times Y$ sera dite localement à projections ouvertes (ou l.p.o.) si pour tout ouvert U de $X \times Y$, les projections de $A \cap U$ sont ouvertes.

Lemme 1.3. *Il existe un espace X polonais parfait de dimension 0, et un fermé l.p.o. A à coupes parfaites non vides de X^2, tels que si F et G sont presque-ouverts non vides dans X et $f : F \longrightarrow G$ surjective continue ouverte, $Gr(f) \not\subseteq A$.*

Démonstration. Soient $X = \omega^\omega$, ϕ un homéomorphisme de X sur l'ensemble P_∞ des suites de 0 et de 1 ayant une infinité de 1, et ψ un homéomorphisme de X sur l'ensemble $\mathscr{K}_P(\mathbf{2}^\omega)$ des compacts parfaits non vides de $\mathbf{2}^\omega$; ψ existe car cet ensemble ne contient pas les compacts finis, est dense et est G_δ de $\mathscr{K}(\mathbf{2}^\omega) \setminus \{\varnothing\}$: en effet, si on désigne par $N(n, \mathbf{2}^\omega)$ le $n^{ième}$ ouvert-fermé de base de $\mathbf{2}^\omega$, on a : K est parfait $\Leftrightarrow \forall m \in \omega\ [(K \cap N(m, \mathbf{2}^\omega) = \varnothing)$ ou $(\exists\ (p, q) \in \omega^2\ N(p, \mathbf{2}^\omega) \cap N(q, \mathbf{2}^\omega) = \varnothing$ et $N(p, \mathbf{2}^\omega) \cup N(q, \mathbf{2}^\omega) \subseteq N(m, \mathbf{2}^\omega)$ et $N(p, \mathbf{2}^\omega) \cap K \neq \varnothing$ et $N(q, \mathbf{2}^\omega) \cap K \neq \varnothing)]$.

Posons $A := (\phi \times \psi)^{-1}(A')$, où $A' := \{(x, K) \in P_\infty \times \mathscr{K}_P(\mathbf{2}^\omega)\ /\ x \in K\}$. Il suffit de montrer les propriétés pour A'. Il est fermé :
$x \notin K \Leftrightarrow \exists\ n \in \omega\ \exists\ U \in \mathbf{\Sigma}^0_1\lceil\mathbf{2}^\omega\ N(n, \mathbf{2}^\omega) \cap U = \varnothing$ et $x \in N(n, \mathbf{2}^\omega)$ et $K \subseteq U$

Il est clairement à coupes parfaites non vides, et il est l.p.o., car si $N_s := \{\alpha \in \mathbf{2}^\omega / s \prec \alpha\}$ et $W_{U, V_0, \ldots, V_n} := \{K \in \mathscr{K}_P(\mathbf{2}^\omega)\ /\ K \subseteq U$ et $\forall\ i \leq n\ V_i \cap K \neq \varnothing\}$ est l'ouvert-fermé de base de $\mathscr{K}_P(\mathbf{2}^\omega)$, on a :

$$\Pi_1[A' \cap (N_s \times W_{U, V_0, \ldots, V_n})] = \varnothing, \text{ ou } N_s \cap U \cap P_\infty, \text{ et}$$
$$\Pi_2[A' \cap (N_s \times W_{U, V_0, \ldots, V_n})] = \varnothing \text{ou } W_{U, V_0, \ldots, V_n, N_s} \cap \mathscr{K}_P(\mathbf{2}^\omega).$$

Raisonnons par l'absurde : il existe $f : F \longrightarrow G$ surjective continue ouverte dont le graphe est contenu dans A', et des ouverts non vides $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ tels que F (resp. G) soit G_δ dense de $\mathscr{U}$ (resp. $\mathscr{V}$).

L'ouvert $\mathscr{V}$ étant non vide contient un ouvert-fermé de base $W_{U, V_0, \ldots, V_n}$, avec U, V_0, ..., V_n ouverts-fermés tels que les $U \cap V_i$ soient non vides. De sorte qu'on peut supposer, quitte à se restreindre à son image réciproque, que $\mathscr{V} = W_{U, V_0, \ldots, V_n}$.

Soit $(S_j)_{j<n+3}$ une partition de U en ouverts-fermés telle que $\forall\ j < n + 3$, $\forall\ i \leq n$, $S_j \cap V_i \neq \varnothing$. Posons, si $I \in \mathscr{P}(n + 3) \setminus \{\varnothing\}$,

$$O_I := \{K \in W_{U, V_0, \ldots, V_n}\ /\ I = \{j < n + 3\ /\ K \cap S_j \neq \varnothing\}\}.$$

Alors (O_I) est une partition en ouverts-fermés non vides de $W_{U, V_0, \ldots, V_n}$, donc $(f^{-1}(O_I))$ est une partition en ouverts-fermés non vides de F ; par propriété de réduction, on trouve une suite d'ouverts non vides de $\mathscr{U}$ deux à deux disjoints, (W_I), telle que $f^{-1}(O_I) = F \cap W_I$.

Alors si $j < n + 3$, $W_{\{j\}} \subseteq S_j$, sinon on trouve x dans $F \cap W_{\{j\}} \setminus S_j$, et $x \in f(x) \in O_{\{j\}}$, donc $f(x) \subseteq S_j$, une contradiction.

Maintenant si $I \subseteq n+3$ est de cardinal 2, il existe $i \leq n$ tel que $V_i \cap \bigcup_{j\in I} S_j \subseteq \overline{W_I}$. En effet, par ce qui précède, si $j \in I$, $S_j \not\subseteq \overline{W_I}$ sinon $W_{\{j\}} \cap W_I \neq \varnothing$. Donc si pour tout $i \leq n$ il existe j dans I tel que $V_i \cap S_j \not\subseteq \overline{W_I}$, l'ensemble $\{K \in O_I\ /\ K \subseteq \check{\overline{W_I}}\}$ est ouvert non vide de $\overline{G}$, donc rencontre G en $K = f(x)$ et $x \in F \cap W_I$, donc $K \cap W_I$ est non vide, une contradiction.

En particulier, si $1 \leq j \leq n + 2$, il existe $i_j \leq n$ tel que $V_{i_j} \cap (S_0 \cup S_j) \subseteq \overline{W_{\{0, j\}}}$. Soient $j \neq j'$ tels que $i_j = i_{j'}$; alors $V_{i_j} \cap S_0 \subseteq \overline{W_{\{0, j\}}} \cap \overline{W_{\{0, j'\}}}$, ce qui contredit la disjonction de $W_{\{0, j\}}$ et $W_{\{0, j'\}}$. □

Théorème 1.4. *Soient* $X := \mathscr{K}(\mathbf{2}^\omega) \setminus \{\varnothing\}$, $Y := \mathbf{2}^\omega$, *et* $A := \{(K, x) \in X \times Y \ / \ x \in K\}$; *alors* A *est un fermé à coupes horizontales non dénombrables, à coupes verticales non dénombrables sur un ensemble co-maigre de* X, *mais si* F *(resp.* G*) est un borélien co-maigre de* X *(resp.* Y*), il n'existe aucun isomorphisme borélien de* F *sur* G *dont le graphe soit contenu dans* A.

Démonstration. Comme on l'a vu dans la preuve du lemme précédent, A est fermé dans $X \times Y$, et l'ensemble des compacts parfaits non vides est G_δ dense de X.

L'ensemble des compacts non dénombrables est donc co-maigre dans X, et les coupes verticales de A sont donc non dénombrables, sauf sur un maigre.

Raisonnons par l'absurde : il existe des ensembles F et G, ainsi qu'un isomorphisme borélien f comme dans l'énoncé.

Alors il existe un G_δ dense F' (resp. G') de X (resp. Y) tels que $F' \subseteq \mathscr{K}_P(\mathbf{2}^\omega) \cap F$, $G' \subseteq G \cap P_\infty$, et que $f : F' \longrightarrow G'$ soit un homéomorphisme.

En effet, on remarque que si U est un ouvert dense de Y, alors $\{K \in X \ / \ K \subseteq U\}$ est un ouvert dense de X ; par suite, si M est maigre relativement à G, on a l'inclusion :

$$f^{-1}(M) \subseteq \Pi_X[(X \times M) \cap A] = \{K \in X \ / \ K \cap M \neq \varnothing\}$$

Donc $f^{-1}(M)$ est maigre relativement à X, et aussi relativement à F qui est co-maigre dans X.

Soit G_1 un G_δ dense de Y, contenu dans $G \cap P_\infty$, sur lequel f^{-1} est continue ; ce qui précède montre que $f^{-1}(G_1)$ est co-maigre dans X.

Si (U_n) est une base de la topologie de G_1, $f^{-1}(U_n)$ est borélien de X, donc égal à un ouvert V_n modulo un maigre M_n ; choisissons pour F' un G_δ dense de X contenu dans $\mathscr{K}_P(\mathbf{2}^\omega) \cap F \cap f^{-1}(G_1) \setminus (\bigcup_{n\in\omega} M_n)$. Il reste à poser $G' := f''F'$.

En effet, on a $f^{-1}(U_n \cap G') = F' \cap f^{-1}(U_n) = F' \cap V_n$; $G' = (f^{-1})^{-1}(F') \cap G_1$ est G_δ ; et si G' n'était pas dense dans Y, on trouverait un ouvert non vide U de Y disjoint de G' ; mais $\{K \in X \ / \ K \subseteq U\}$ serait un ouvert non vide, et rencontrerait donc F' en un point K qui vérifierait $f(K) \in K \subseteq U$ et aussi $f(K) \in G'$, ce qui est la contradiction cherchée.

Mais ceci contredit la preuve du lemme 1.3. □

En analysant les raisons de ce résultat négatif, nous allons maintenant montrer que l'application transformant ensembles de mesure 0 en ensembles maigres n'a pas de propriétés de mesurabilité projective, sous hypothèse de détermination des jeux projectifs.

Pour démontrer le théorème 1.1, les auteurs montrent le lemme suivant :

Lemme 1.5. *Soient* X *un espace polonais,* μ *une mesure de probabilité sur* X, *et* A *un borélien de* $X \times X$ *ayant ses coupes horizontales non dénombrables* μ*-presque partout. Alors il existe un* K_σ *de* X, F, *et une application borélienne* $f : F \longrightarrow X$ *tels que* $Gr(f) \subseteq A$ *et* $\mu(\{y \in X \ / \ f^{-1}(\{y\})$ *est non dénombrable*$\}) = 1$.

Corollaire 1.6. *Soient* $B := [0, 1]$, λ *la mesure de Lebesgue sur* B, A *un borélien de* $B \times B$ *tel que* $\lambda(\{y \in B \ / \ A^y$ *est non dénombrable*$\}) = 1$; *alors il existe des boréliens disjoints de* B, B_0 *et* B_1, *tels que*

$$\lambda(\{y \in B \ / \ B_i \cap A^y \text{ est non dénombrable}\}) = 1 .$$

Démonstration. Soient F et f fournis par le lemme 1.5, et G_y une copie de $\mathbf{2}^\omega$ contenue dans $f^{-1}(\{y\})$, si ce borélien est non dénombrable. Si $x \in G_y \setminus \{\min\ G_y,\ \max\ G_y\}$, les ouverts $[0, x[\cap G_y$ et $]x, 1] \cap G_y$ sont non vides, donc non dénombrables ; posons donc :

$$E(y, x) \Leftrightarrow x \in F \text{ et } f(x) = y \text{ et } [0, x[\cap f^{-1}(\{y\}),]x, 1] \cap f^{-1}(\{y\}) \text{ sont non dénombrables.}$$

Alors E est analytique dans $B \times B$, donc par le théorème de von Neumann on trouve une application $g : B \longrightarrow B$ Baire-mesurable telle que si $f^{-1}(\{y\})$ est non dénombrable, $g(y) \in F$, $f(g(y)) = y$, et $[0, g(y)[\cap f^{-1}(\{y\})$, $]g(y), 1] \cap f^{-1}(\{y\})$ sont non dénombrables.

Soit alors G un borélien de B tel que $\lambda(G) = 1$, la restriction de g à G soit borélienne, et contenu dans $\{y \in B \ / \ f^{-1}(\{y\})$ est non dénombrable$\}$. Il reste à poser :

$$B_0 := \{x \in F \ / \ f(x) \in G \text{ et } x < g(f(x))\},$$
$$B_1 := \{x \in F \ / \ f(x) \in G \text{ et } x > g(f(x))\}.$$

En effet, si $y \in G$, $[0, g(y)[\cap f^{-1}(\{y\}) \subseteq B_0 \cap A^y$, donc $B_0 \cap A^y$ est non dénombrable, de même que $B_1 \cap A^y$. □

Lemme 1.7. *Il existe un* G_δ *de* $B \times B$, A, *où* $B := [0, 1]$, *tel que l'ensemble défini par* $\{y \in B \ / \ A^y$ *est non dénombrable*$\}$ *soit co-maigre, alors que pour tout couple* (B_0, B_1) *de boréliens disjoints de* B, $\{y \in B \ / \ B_i \cap A^y$ *est non dénombrable*$\}$ *ne sont pas tous deux co-maigres.*

Démonstration. $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ est homéomorphe à P_∞, qui est co-dénombrable dans l'espace parfait $\mathbf{2}^\omega$; il suffit donc de trouver A dans $\mathbf{2}^\omega \times \mathbf{2}^\omega$, ayant les propriétés du lemme. D'autre part, $\mathscr{K}(\mathbf{2}^\omega) \setminus \{\varnothing\}$ est un espace compact métrisable parfait de dimension 0 et non vide, donc est homéomorphe à $\mathbf{2}^\omega$; il suffit donc de trouver A dans $\mathbf{2}^\omega \times \mathscr{K}(\mathbf{2}^\omega) \setminus \{\varnothing\}$. Reprenons l'exemple de 1.4 : $A = \{(x, K) \in \mathbf{2}^\omega \times \mathscr{K}(\mathbf{2}^\omega) \setminus \{\varnothing\} \ / \ x \in K\}$. Raisonnons par l'absurde : B_0 et B_1 existent. Par la preuve de 1.4, ces deux ensembles sont nécessairement non maigres; on trouve donc des ouverts disjoints et non vides de $\mathbf{2}^\omega$, U_0 et U_1, tels que $B_0 \Delta U_0$ et $\check{B}_0 \Delta U_1$ soient maigres.

Comme on l'a vu dans la preuve du théorème 1.4, $\{K \in \mathscr{K}(\mathbf{2}^\omega) \setminus \{\varnothing\} \ / \ K \cap (B_0 \Delta U_0) = \varnothing\}$ est co-maigre, ainsi que $\{K \in \mathscr{K}(\mathbf{2}^\omega) \setminus \{\varnothing\} \ / \ B_0 \cap K$ est non dénombrable$\}$, donc que l'ensemble $\{K \in \mathscr{K}(\mathbf{2}^\omega) \setminus \{\varnothing\} \ / \ K \cap U_0 \neq \varnothing\}$; ce dernier rencontre donc l'ouvert non vide $\{K \in \mathscr{K}(\mathbf{2}^\omega) \setminus \{\varnothing\} \ / \ K \subseteq U_1\}$, ce qui contredit la disjonction de U_0 et U_1. □

Il résulte immédiatement du théorème 19.6 de **[O]** que sous l'hypothèse du continu, il existe une bijection idempotente Φ de $B := [0, 1]$ sur lui-même telle que E est maigre si et seulement si $\lambda(\Phi^{-1}(E)) = 0$. Ce qui précède entraîne le :

Corollaire 1.8. *Une telle fonction* Φ *n'est pas borélienne. De plus, sous hypothèse de détermination des jeux* $\mathbf{\Delta}^1_{2n+3}$, Φ n'est pas $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$-mesurable.

Démonstration. Le premier point résulte aussitôt du corollaire 1.6 et du lemme 1.7. Si Φ était $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$-mesurable, et si A est le G_δ du lemme 1.7, l'ensemble

$A' := (I \times \Phi)^{-1}(A)$ serait $\mathbf{\Pi}^1_{\mathbf{2n+1}}$, ainsi que $E := \{(y, K) \in B \times \mathscr{K}(B) \setminus \{\varnothing\} \ / \ K$ est parfait et $K \subseteq A'^y\}$; par la détermination des jeux $\mathbf{\Delta}^1_{\mathbf{2n}}$, E serait uniformisable par un graphe partiel $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$, et la fonction correspondante se prolongerait en une fonction f totale $\mathbf{\Delta}^1_{\mathbf{2n+3}}$-mesurable. Par la détermination des jeux $\mathbf{\Delta}^1_{\mathbf{2n+3}}$, f serait λ-mesurable, donc il existerait un borélien G de B tel que $\lambda(G) = 1$, la restriction de f à G soit borélienne, et $(y, f(y)) \in E$ si $y \in G$.

Posons $A'' := \{(x, y) \in B \times B \ / \ y \in G$ et $x \in f(y)\}$; alors A'' serait un borélien contenu dans A', et le corollaire 1.6 fournirait des boréliens disjoints B_0 et B_1. Les ensembles $\{y \in B \ / \ B_i \cap (I \times \Phi)[A'']^y$ est non dénombrable$\}$ seraient donc co-maigres, ainsi que $\{y \in B \ / \ B_i \cap A^y$ est non dénombrable$\}$, ce qui contredirait le lemme 1.7. □

Dans [**Ma**], la question suivante est posée : étant donné un borélien A de $[0, 1] \times [0, 1]$ dont toutes les coupes sont non maigres, existe-t-il un isomorphisme borélien de $[0, 1]$ sur lui-même dont le graphe soit contenu dans A ? La réponse est non, comme le montre le théorème 3 de [**D-SR**]. On a cependant le résultat suivant :

Théorème 1.9. *Soient X et Y des espaces polonais parfaits non vides, $A \subseteq X \times Y$ ayant la propriété de Baire et ses coupes non maigres (sauf sur des ensembles maigres). Alors il existe un ensemble $K_\sigma \cup G_\delta$, F (resp. G), co-maigre dans X (resp. Y), et un isomorphisme de deuxième classe de F sur G dont le graphe est contenu dans A.*

Lemme 1.10. *Soient (C_n), (D_n) des suites d'ouverts-fermés non vides de ω^ω, A dans $\omega^\omega \times \omega^\omega$ tel que $A \Delta (\bigcup_{n \in \omega} C_n \times D_n)$ soit maigre ; alors il existe des suites (K^0_n) et (K^1_n) de copies de $\mathbf{2}^\omega$, des suites (G^0_n) et (G^1_n) de G_δ de ω^ω vérifiant :*

(i) $(K^0_n \times G^0_n) \cup (G^1_n \times K^1_n) \subseteq A$

(ii) $K^0_n \subseteq C_n \setminus (\bigcup_{q<n} K^0_q)$, $K^1_n \subseteq D_n \setminus (\bigcup_{q<n} K^1_q)$

(iii) G^0_n *(resp.* G^1_n*) est dense dans* $D_n \setminus (\bigcup_{q<n} D_q \cup \bigcup_{p \in \omega} K^1_p)$ *(resp.* $C_n \setminus (\bigcup_{q<n} C_q \cup \bigcup_{p \in \omega} K^0_p)$*)*

Démonstration. On construit d'abord la suite (K^0_n) et une suite (H^0_n) de G_δ de ω^ω vérifiant $K^0_n \times H^0_n \subseteq A \cap [C_n \setminus (\bigcup_{q<n} K^0_q) \times D_n \setminus (\bigcup_{q<n} D_q)]$, H^0_n étant dense dans $D'_n := D_n \setminus (\bigcup_{q<n} D_q)$.

Admettons la construction effectuée pour $q < n$. Soit $C'_n := C_n \setminus (\bigcup_{q<n} K^0_q)$; $A \cap C'_n \times D'_n$ est co-maigre dans $C'_n \times D'_n$, d'où l'existence de K^0_n et H^0_n.

De même, on construit des suites (K^1_n) et (H^1_n) vérifiant des propriétés analogues : $H^1_n \times K^1_n \subseteq A \cap [C_n \setminus (\bigcup_{q<n} C_q) \times D_n \setminus (\bigcup_{q<n} K^1_q)]$, et H^1_n est dense dans $C_n \setminus (\bigcup_{q<n} C_q)$. Il reste à poser $G^0_n := H^0_n \setminus (\bigcup_{p \in \omega} K^1_p)$, $G^1_n := H^1_n \setminus (\bigcup_{p \in \omega} K^0_p)$. □

Démonstration du théorème 1.9. L'ensemble A ayant la propriété de Baire, il est réunion disjointe d'un G_δ et d'un ensemble maigre, qui a ses coupes maigres, sauf sur des ensembles maigres ; on peut donc supposer que A est G_δ à coupes non maigres de $\omega^\omega \times \omega^\omega$, X et Y étant parfaits non vides.

On trouve alors des suites (C_n) et (D_n) vérifiant les conditions du lemme 1.10, qui peut donc s'appliquer. Posons $I := \{n \in \omega \ / \ G^0_n \neq \varnothing\}$, $F_0 := \bigcup_{n \in I} K^0_n$, $G_0 := \bigcup_{n \in I} G^0_n$. Si $n \in \omega$, $D_n \setminus (\bigcup_{q<n} D_q \cup \bigcup_{p \in \omega} K^1_p)$, donc G^0_n, sont

denses dans $D_n \setminus (\bigcup_{q<n} D_q)$; par conséquent, G_0 est dense dans $\bigcup_{n\in\omega} D_n$. D'autre part, $G_0 \in \Delta_1^0 - PU(G_\delta)\lceil(\bigcup_{n\in\omega} D_n)$, donc G_0 est G_δ. Comme A est à coupes non maigres, $\bigcup_{n\in\omega} D_n$ est dense dans Y, donc G_0 est G_δ dense dans Y.

Si $n \in I$, G_n^0 est polonais non dénombrable, donc il existe un isomorphisme de première classe f_n de K_n^0 sur G_n^0. Alors

$$g_0 : \begin{cases} F_0 \longrightarrow G_0, \\ x \longmapsto f_n(x) \text{ si } x \in K_n^0 \end{cases}$$

est bien définie (par (ii)), injective (par (iii)) donc bijective, de première classe par compacité de K_n^0, et g_0^{-1} est aussi de première classe car $G_n^0 = G_0 \cap [D_n \setminus (\bigcup_{q<n} D_q)]$. Enfin, le graphe de g_0 est contenu dans A par (i).

De même, on trouve un isomorphisme de première classe g_1, du K_σ maigre de Y $F_1 := \bigcup_{n\in J} K_n^1$ sur le G_δ dense de X, $G_1 := \bigcup_{n\in J} G_n^1$, où $J := \{n \in \omega \ / \ G_n^1 \neq \varnothing\}$. Alors

$$F := F_0 \cup G_1, \quad G := F_1 \cup G_0, \quad \text{et } f : \begin{cases} F \longrightarrow G \\ x \longmapsto \begin{cases} g_0(x) \text{ si } x \in F_0 \\ g_1^{-1}(x) \text{ si } x \in G_1 \end{cases} \end{cases}$$

répondent au problème. □

Venons-en à l'étude de la réciproque du lemme de l'introduction ; dans ce lemme, il est question de fonctions continues et ouvertes, donc non nécessairement injectives. Le contre-exemple du théorème 1.4. n'est donc pas un obstacle à la réciproque. De fait, l'application définie par

$$\phi : \begin{cases} \{K \in \mathscr{K}(2^\omega) \setminus \{\varnothing\} \ / \ K \text{ est parfait}\} \longrightarrow P_\infty \\ \qquad\qquad\qquad\qquad K \longmapsto \max(K) \end{cases}$$

est surjective continue et ouverte et son graphe est contenu dans $\{(K, x) \in \mathscr{K}(2^\omega) \setminus \{\varnothing\} \times 2^\omega \ / \ x \in K\}$. Cependant, ϕ n'est injective sur aucun G_δ dense. Plus généralement, on a :

Proposition 1.11. *Soient X un espace polonais, Y un espace séparé, $f : X \longrightarrow Y$ continue et ouverte. Si f n'est pas injective, f n'est injective sur aucun G_δ dense de X.*

Démonstration. Posons $E := \{(x, x') \in X^2 \ / \ x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x')\}$. Alors E est G_δ, et l.p.o. : si U et V sont ouverts dans X, $\Pi[E \cap (U \times V)] = U \cap \{x \in X \ / \ f(x) \in f[V \setminus \{x\}]\}$, comme on le vérifie immédiatement. Si $f(x_0) \in f[V \setminus \{x_0\}]$, soit $x_1 \in V \setminus \{x_0\}$ tel que $f(x_0) = f(x_1)$. On trouve des ouverts disjoints W_i de X tels que $x_i \in W_i$, $W_1 \subseteq V$. Si $x \in f^{-1}(f[W_1]) \cap W_0$ (qui est un ouvert contenant x_0), $f(x) = f(y)$, où $y \in W_1 \subseteq V$, et $x \neq y$ car $W_0 \cap W_1 = \varnothing$. Si E est non vide, on applique le lemme 4.4 de **[Le1]** pour voir que E rencontre tout carré G_δ dense ; d'où le résultat. □

Le lemme 1.3 montre qu'on ne peut pas avoir l'image "grosse" en général, dans une uniformisation du type von Neumann, même pour un fermé l.p.o. non vide d'un produit d'espaces polonais parfaits de dimension 0. Cependant, l'uniformisation souhaitée a lieu dans au moins un sens (on l'a vu avant 1.11 dans le cas particulier). Le théorème 1.13 qui suit est le résultat essentiel de ce chapitre. Il est à noter que malgré des hypothèses complètement symétriques, la conclusion ne l'est pas (cf. le lemme 1.3).

Lemme 1.12. *Soient X et Y des espaces polonais, A un G_δ l.p.o. non vide de $X \times Y$ de projections X et Y, et F (resp. G) un G_δ dense de X (resp. Y). Alors les projections de $A \cap (F \times G)$ sont co-maigres.*

Démonstration. Si $\Pi_X[A \cap (F \times G)]$ n'est pas co-maigre, soit U un ouvert non vide tel que $M := \Pi_X[A \cap (F \times G)] \cap U$ soit maigre ; $A \cap (U \times Y)$ est G_δ l.p.o. non vide de $U \times Y$, donc par le lemme 4.4 de **[Le1]** rencontre $(U \cap F \setminus M) \times G$ en un point (x, y) qui vérifie $x \in M \setminus M$. □

Théorème 1.13. *Soient X et Y des espaces polonais parfaits de dimension 0, A un G_δ l.p.o. non vide de $X \times Y$. Alors il existe des ensembles presque-ouverts non vides F et G, l'un contenu dans X et l'autre dans Y, et une surjection continue ouverte de F sur G dont le graphe est contenu dans A ou dans $\{(y, x) \in Y \times X \ / \ (x, y) \in A\}$ selon le cas.*

Démonstration. Premier cas : Dans tout rectangle ouvert non vide $U \times V$ tel que les projections de $A \cap (U \times V)$ soient denses dans U et V, on trouve un sous-rectangle $U' \times V'$ de $U \times V$ ayant ces propriétés et tel que pour toute partie rare R de V', $\Pi_X[A \cap (U' \times R)]$ n'est pas dense dans U'.

Soient (O_n) une suite d'ouverts de $X \times Y$ telle que $A = \bigcap_{n\in\omega} O_n$, et $U_\varnothing$ et $V_\varnothing$ fournis par la propriété précédente appliquée aux projections de A ; on construit alors des suites d'ouverts non vides $(U_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ et $(V_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ vérifiant :

(i) $\bigcup_{n\in\omega} U_{s^\frown n}$ est dense dans U_s.

(ii) $U_s \times V_s \subseteq O_{(|s|-1)}$ si $s \neq \varnothing$.

(iii) $\delta(U_s)$, $\delta(V_s) < |s|^{-1}$ si $s \neq \varnothing$.

(iv) $U_{s^\frown n} \cap U_{s^\frown m} = \varnothing$ si $n \neq m$.

(v) $\overline{U_{s^\frown n}} \subseteq U_s$, $\overline{V_{s^\frown n}} \subseteq V_s$.

(vi) Les projections de $A \cap (U_s \times V_s)$ sont denses dans U_s et V_s.

(vii) Si R est rare dans V_s, $\Pi_X[A \cap (U_s \times R)]$ n'est pas dense dans U_s.

Admettons la construction effectuée pour $|s| \leq p$. Partitionnons $\Pi_X[A \cap (U_s \times V_s)]$ (éventuellement privé d'un point) en une infinité d'ouverts-fermés non vides, disons (Z_n), et soit $T_n := \Pi_Y[A \cap (Z_n \times V_s)]$ (c'est un ouvert non vide de V_s). Soit H_n l'ensemble des parties de $\mathbf{\Sigma}^0_1\lceil Z_n \setminus \{\varnothing\} \times \mathbf{\Sigma}^0_1\lceil Z_n \setminus \{\varnothing\}$ telles que si (U, V) et (U', V') sont distincts dans P, U et U' soient disjoints et $U \times V \subseteq O_{|s|}$, $\delta(U)$, $\delta(V) < (|s|+1)^{-1}$, $\overline{U} \subseteq Z_n$, $\overline{V} \subseteq T_n$, les projections de $A \cap (U \times V)$ soient denses dans U et V, et pour toute partie rare R de V, $\Pi_X[A \cap (U \times R)]$ ne soit pas dense dans U.

Alors H_n n'est pas vide, puisqu'il contient le vide, et est ordonné de façon inductive par l'inclusion, donc par le lemme de Zorn a un élément maximal P_n. Alors si on note $P_n = \{(U_m, V_m) \ / \ m \in I_n\}$, l'ouvert $u := \bigcup_{m\in I_n} U_m$ est dense dans Z_n, sinon soit U un ouvert non vide de Z_n disjoint de u, et (x, y) dans $A \cap (U \times T_n)$; on trouve des ouverts-fermés U'' et V'', de diamètre au plus $(|s|+1)^{-1}$, tels que $(x, y) \in U'' \times V'' \subseteq O_{|s|} \cap (U \times T_n)$. On applique alors la propriété du premier cas aux projections de $A \cap (U'' \times V'')$ pour obtenir la contradiction cherchée avec la maximalité de P.

On obtient maintenant les $U_{s^\frown n}$ en renumérotant la suite des ouverts U pour lesquels on trouve V et n tels que $(U, V) \in P_n$, et $V_{s^\frown n}$ est le V correspondant. La construction est donc possible.

Soit $F' := \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{s\in\omega^n} U_s$; alors F' est G_δ dense de $U_\varnothing$, donc presque-ouvert. Si x est dans F', on définit $f(x)$ de la manière habituelle, et la fonction f est continue et uniformise partiellement A. De plus, si un ouvert non vide de F' avait une image maigre, il contiendrait un ouvert non vide d'image rare par le théorème de Baire et la continuité de f. Mais ceci est exclus à cause de la condition (vii), puisque $f[F' \cap U_s] \subseteq V_s$.

Soit (U_n) une base de la topologie de F', (V_n) une suite d'ouverts de Y, et M_n une suite de F_σ maigres de Y tels que $f[F' \cap U_n] \Delta V_n \subseteq M_n$. Posons $F = F' \setminus (\bigcup_{n\in\omega} f^{-1}(M_n))$; F est G_δ dense de $U_\varnothing$ comme F' par ce qui précède. Il est maintenant clair qu'on peut poser $G := (\bigcup_{n\in\omega} V_n) \setminus (\bigcup_{n\in\omega} M_n)$.

Second cas : Il existe un rectangle ouvert non vide $U_\varnothing \times V_\varnothing$ tel que les projections de $A \cap (U_\varnothing \times V_\varnothing)$ soient denses dans $U_\varnothing$ et $V_\varnothing$, tel que pour tout sous-rectangle $U' \times V'$ de $U_\varnothing \times V_\varnothing$ ayant ces propriétés, on trouve une partie rare R de V' telle que $\Pi_X[A \cap (U' \times R)]$ soit dense dans U'.

Soient $n_0 \in \omega$, $\varepsilon > 0$, et U' et V' des ouverts ayant ces propriétés ; on montre qu'il existe des suites d'ouverts non vides (U_n) et (V_n) telles que :

(i) $\bigcup_{n\in\omega} U_n$ est dense dans U', $\bigcup_{n\in\omega} V_n$ est dense dans V'.

(ii) $U_n \times V_n \subseteq O_{n_0}$.

(iii) $\delta(U_n)$, $\delta(V_n) < \varepsilon$.

(iv) $V_n \cap V_m = \varnothing$ si $n \neq m$.

(v) $\overline{U_n} \subseteq U'$, $\overline{V_n} \subseteq V'$.

(vi) Les projections de $A \cap (U_n \times V_n)$ sont denses dans U_n et V_n.

Soit (x_n) une suite dense de $\Pi_X[A \cap (U' \times V')]$ (donc de U'). On va commencer par construire des suites d'ouverts-fermés non vides (Z_n) et (T_n) vérifiant $A \cap (Z_n \times T_n) \neq \varnothing$, $Z_n \times T_n \subseteq O_{n_0} \cap [(U' \cap \mathscr{B}(x_n, 2^{-n})) \times V' \setminus (\bigcup_{p<n} T_p \cup R)]$, de diamètre au plus ε.

Admettons avoir trouvé $(Z_p)_{p<n}$ et $(T_p)_{p<n}$ ayant ces propriétés. Comme R est rare et non vide, $\bigcup_{p<n} T_p \subsetneqq V' \setminus R$, et les projections de

$$A \cap \left[U' \times \left(V' \setminus \left(\bigcup_{p<n} T_p \right) \right) \right]$$

sont co-maigres dans U' et $V' \setminus (\bigcup_{p<n} T_p)$. Par le lemme précédent, celles de l'ensemble défini par $A_n := A \cap [U' \times (V' \setminus (\bigcup_{p<n} T_p \cup R))]$ le sont également ; la projection sur X rencontre donc $\mathscr{B}(x_n, 2^{-n})$ en z_n ; soit y_n tel que $(z_n, y_n) \in A_n$, et Z_n, T_n des ouverts-fermés de diamètre au plus ε tels que l'on ait $(z_n, y_n) \in Z_n \times T_n \subseteq O_{n_0} \cap [(U' \cap \mathscr{B}(x_n, 2^{-n})) \times V' \setminus (\bigcup_{p<n} T_p \cup R)]$. La construction est donc possible.

Si $\bigcup_{n\in\omega} \Pi_Y[A \cap (Z_n \times T_n)]$ est dense dans V', on définit

$$V_n := \Pi_Y[A \cap (Z_n \times T_n)]$$

ainsi que $U_n := \Pi_X[A \cap (Z_n \times V_n)]$, et les conditions sont vérifiées, par densité de la suite (z_n) dans U'. Sinon, la construction précédente montre que les autres conditions sont réalisées. On pose

$$Y' := \Pi_Y[A \cap (U' \times V')] \setminus \overline{\bigcup_{n\in\omega} \Pi_Y[A \cap (Z_n \times T_n)]}.$$

Si $(x, y) \in A \cap (U' \times Y')$, soit $Z_{x,y} \times T_{x,y}$ un rectangle ouvert de diamètre au plus ε tel que l'on ait les inclusions $(x, y) \in Z_{x,y} \times T_{x,y} \subseteq \overline{Z_{x,y} \times T_{x,y}} \subseteq O_{n_0} \cap (U' \times Y')$ et tel que les projections de $A \cap (Z_{x,y} \times T_{x,y})$ soient $Z_{x,y}$ et $T_{x,y}$. On a $Y' = \bigcup_{x,y} T_{x,y} = \bigcup_{n\in\omega} T_{x_n,y_n}$. Réduisons la suite (T_{x_n,y_n}) en (T'_n), et posons $Z'_n := \Pi_X[A \cap (Z_{x_n,y_n} \times T'_n)]$. Alors en ne gardant que les T'_n non vides, les Z'_n correspondants, et les Z_n et T_n, on a ce qu'on veut.

On recopie alors quasiment la construction du théorème 5.2 de **[Le1]** : soit ϕ_0 de ω dans $\{\varnothing\}$ et, si $n > 0$, ϕ_n une bijection de ω sur ω^n. On construit une suite $(U_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ d'ouverts non vides de X, et une suite $(V_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ d'ouverts non vides de Y vérifiant :

(i) $\bigcup_{n\in\omega} \overline{U_{s^\frown n}}$ est dense dans U_s, $\bigcup_{n\in\omega} \overline{V_{s^\frown n}}$ est dense dans V_s.

(ii) $U_s \times V_s \subseteq O_{(|s|-1)}$ si $s \neq \varnothing$.

(iii) $\delta(U_s)$, $\delta(V_s) < |s|^{-1}$ si $s \neq \varnothing$.

(iv) $V_{s^\frown n} \cap V_{s^\frown m} = \varnothing$ si $n \neq m$.

(v) $(\bigcup_{k\in\omega} U_{\phi_n(k)}) \cap \bigcup_{q+p<n-1} [U_{\phi_q(p)} \setminus (\bigcup_{l\in\omega} U_{\phi_q(p)^\frown l})] = \varnothing$.

(vi) Les projections de $A \cap (U_s \times V_s)$ sont denses dans U_s et V_s.

Admettons avoir construit les suites $(U_s)_{|s|\leq n}$ et $(U_s)_{|s|\leq n}$, ainsi que $(U_{\phi_n(p)^\frown k})_{p<m,k\in\omega}$, $(V_{\phi_n(p)^\frown k})_{p<m,k\in\omega}$ vérifiant (i)–(vi).

On construit, si ce n'est déjà fait, $(U_{\phi_n(m)^\frown k})_{k\in\omega}$ et $(V_{\phi_n(m)^\frown k})_{k\in\omega}$ en appliquant ce qui précède à $\varepsilon = (n+1)^{-1}$, $V' := V_{\phi_n(m)}$, $U' := U_{\phi_n(m)} \setminus \overline{\bigcup_{q+p<n} [U_{\phi_q(p)} \setminus (\bigcup_{l\in\omega} U_{\phi_q(p)^\frown l})]}$.

Les conditions demandées sont vérifiées, la densité des projections de $A \cap (U' \times V')$ dans U' et V', donc dans $U_{\phi_n(m)}$ et $V_{\phi_n(m)}$, ne posant pas de problème à cause du lemme précédent. On définit alors F et G comme dans le théorème 5.2 de **[Le1]** ; ce sont des G_δ denses de $V_\varnothing$ et $U_\varnothing$, donc des presque-ouverts non vides. On conclut alors comme dans le théorème 5.2 de **[Le1]**. □

Sous les hypothèses du théorème 1.13, il est faux en général que A est uniformisable sur un G_δ dense de sa projection par une application continue ouverte sur son image (bien que A soit uniformisable par une application continue). En effet, on prend l'exemple du lemme 1.3, ce qui fournit $A_0 \subseteq N_{(0)} \times \omega^\omega$; si A_1 est le graphe d'un homéomorphisme de $\omega^\omega \setminus N_{(0)}$ sur ω^ω, $A_0 \cup A_1$ est fermé l.p.o. de $\omega^\omega \times \omega^\omega$, de projections ω^ω. Raisonnons par l'absurde : il existe un G_δ dense G de ω^ω et une application f continue sur G et ouverte sur $f[G]$, qui uniformise A partiellement. Alors $f[G \cap N_{(0)}]$ est G_δ rare, par construction de A_0.

Mais comme $f[G \setminus N_{(0)}]$ est G_δ dense de ω^ω, $f[G]$ aussi, donc $f[G \cap N_{(0)}]$ est ouvert non vide et rare de $f[G]$, ce qui est absurde. Cependant, l'uniformisation a lieu si A est le graphe d'une surjection continue ouverte de Y dans X :

Proposition 1.14. *Soient X et Y des espaces métrisables séparables de dimension 0, Y étant complet, et $f : Y \longrightarrow X$ une surjection continue ouverte ; alors il existe un homéomorphisme g de X sur son image tel que $f \circ g = Id_X$.*

Démonstration. On construit des suites d'ouverts-fermés $(U_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ et $(V_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ vérifiant :

(i) $\bigcup_{n\in\omega} U_{s^\frown n} = U_s$.

(ii) $U_s = f[V_s]$.

(iii) $\delta(U_s)$, $\delta(V_s) < |s|^{-1}$ si $s \neq \varnothing$.

(iv) $U_{s^\frown n} \cap U_{s^\frown m} = V_{s^\frown n} \cap V_{s^\frown m} = \varnothing$ si $n \neq m$.

(v) $V_{s^\frown n} \subseteq V_s$.

On pose $U_\varnothing := X$, $V_\varnothing := Y$; si on a U_s et V_s, on partitionne U_s en une suite (U_n) d'ouverts-fermés de diamètre au plus $(|s| + 1)^{-1}$; on partitionne ensuite l'ouvert-fermé $V_s \cap f^{-1}(U_n)$ en une suite $(V_m^n)_m$ d'ouverts-fermés de diamètre au plus $(|s| + 1)^{-1}$. La suite double d'ouverts $(f[V_m^n])$ est ensuite réduite en (W_m^n), et on renumérote les W_m^n, l'ouvert-fermé correspondant dans Y étant $V_m^n \cap f^{-1}(W_m^n)$.

Cette construction étant faite, elle définit de la manière habituelle une application continue $g : X \longrightarrow Y$. De plus, si α est tel que $x \in \bigcap_{n\in\omega} U_{\alpha\lceil n}$, on a les égalités $f(g(x)) \in \bigcap_{n\in\omega} f[V_{\alpha\lceil n}] = \bigcap_{n\in\omega} U_{\alpha\lceil n} = \{x\}$, d'où le fait que $f \circ g = Id_X$ et l'injectivité de g. Enfin, par la condition (ii), on a $g[U_s] = g[X] \cap V_s$, donc g est ouverte sur son image. □

Bien sûr, ce résultat est faux si on enlève la condition de dimension sur X.

Corollaire 1.15. *Soient X et Y des espaces polonais parfaits de dimension 0, A un G_δ l.p.o. non vide de $X \times Y$. Alors A est uniformisable sur un presque-ouvert non vide de X par une application continue et ouverte sur son image.*

Démonstration. On applique le théorème 1.13: on a le résultat tout de suite ou alors on applique la proposition précédente. □

Bien sûr, à cause du lemme 1.3, l'image de l'application fournie par ce corollaire est en général rare.

2. Applications aux classes de Wadge potentielles

On va maintenant appliquer les résultats d'uniformisation aux classes de Wadge potentielles : on obtient pour commencer des caractérisations des ensembles potentiellement différence d'ouverts parmi les ensembles potentiellement $\mathbf{\Sigma}_3^0$ et $\mathbf{\Pi}_3^0$ (donc par exemple parmi les boréliens à coupes dénombrables).

Lemme 2.1. *Soit X un espace polonais récursivement présenté. Alors il existe un G_δ dense Σ_1^1 de X sur lequel la topologie de X coïncide avec la topologie Δ engendrée par les Δ_1^1.*

Démonstration. Il est prouvé dans **[Ke]** que si A est Δ_1^1, il existe un Δ_1^1 ouvert U et un Δ_1^1 à coupes fermées rares F de $\omega \times X$ tels que $A \Delta U \subseteq \bigcup_{p\in\omega} F_p$. Cette propriété s'écrit de manière Π_1^1 ; on peut donc associer, à tout entier n codant un Δ_1^1, un entier $(f(n))_0$ codant un ouvert Δ_1^1, et un entier $(f(n))_1$

codant un Δ_1^1 à coupes fermées rares de $\omega \times X$, en gardant l'inclusion ci-dessus, et ce par une fonction Π_1^1-récursive partielle f. Désignons par W^X un ensemble $\Pi_1^1 \subseteq \omega$ de codes pour les Δ_1^1 de X et par $C^X \subseteq \omega \times X$ un ensemble Π_1^1 dont les sections aux points de W^X décrivent les Δ_1^1 de X (cf. **[Lo2]**).

On pose $x \in G \Leftrightarrow \forall\, n\, \forall\, p \quad n \notin W^X$ ou $((f(n))_1,\ p,\ x) \notin C^{\omega\times X}$. Alors G répond au problème : $\check{G}$ est réunion dénombrable de fermés rares, et si n code $A \in \Delta_1^1$, on a $A \cap G = C^X_{(f(n))_0} \cap G$, qui est ouvert dans G. □

Dans la suite, si f_s est une fonction partielle de X dans Y ou de Y dans X, on notera $G(f_s)$ la partie de $X \times Y$ égale au graphe de f_s si f_s va de X dans Y, et à $Gr(f_s)^* := \{(x, y) \mid x = f_s(y)\}$ sinon.

Lemme 2.2. *Soient X un espace polonais parfait récursivement présenté, G un universel pour les Π_1^1 de X, φ et ψ des Π_1^1-opérateurs monotones sur X, et Φ^ξ les opérateurs sur X définis par $\Phi^0(A) = A$, et $\Phi^\xi(A) = \varphi(\bigcup_{\eta<\xi} \Phi^\eta(A))$ si ξ est impair, $\Phi^\xi(A) = \psi(\bigcup_{\eta<\xi} \Phi^\eta(A))$ si $\xi > 0$ est pair. Alors si $R(\alpha, \beta, x) \Leftrightarrow \alpha \in WO$ et $x \in \Phi^{|\alpha|}(G_\beta)$, la relation R est Π_1^1.*

Démonstration. Ce lemme est démontré dans **[Lo1]** si $\varphi = \psi = \Phi$. La démonstration ici est analogue ; précisons-en les différences.

On sait qu'il existe une fonction Δ_1^1-récursive $g : \omega^\omega \times \omega \longrightarrow \omega^\omega$ telle que si $\alpha \in WO$, $g(\alpha, n) \in WO$ et code l'odre $\leq_\alpha$ restreint aux prédécesseurs de n pour $\leq_\alpha$. On définit par récurrence une fonction Δ_1^1-récursive $\varepsilon : \omega^\omega \longrightarrow \omega$ telle que si $\alpha \in WO$, on ait l'égalité:

$$\varepsilon(\alpha) = \begin{cases} 0 \text{ si } |\alpha| \text{ est pair} \\ 1 \text{ si } |\alpha| \text{ est impair} \end{cases}$$

On définit alors un Π_1^1-opérateur monotone Ψ par :

$$(n, \alpha, \beta, x) \in \Psi(P) \Leftrightarrow (n = 0 \text{ et } \alpha \in WO \text{ et } \forall\, p\ (0, g(\alpha, p), \beta, x) \in P)$$

ou

$$\begin{aligned}&(n = 1 \text{ et } \alpha \in WO \text{ et } \exists\, q \mid q \leq_\alpha q \text{ et } \forall\, p\ (0, g(\alpha, p), \beta, x) \in P \text{ et}\\ &[(\varepsilon(\alpha) = 0 \text{ et } x \in \psi(\{y \in X \mid \exists\, q\ P(1, g(\alpha, q), \beta, y)\})) \text{ ou}\\ &(\varepsilon(\alpha) = 1 \text{ et } x \in \varphi(\{y \in X \mid \exists\, q\ P(1, g(\alpha, q), \beta, y)\}))]) \text{ ou}\\ &P(n, \alpha, \beta, x).\end{aligned}$$

On montre alors comme dans **[Lo1]** que :

$$\begin{aligned}&(0, \alpha, \beta, x) \in \Psi^\xi(P_0) \Leftrightarrow \alpha \in WO \text{ et } |\alpha| \leq \xi, \text{ et}\\ &(1, \alpha, \beta, x) \in \Psi^\xi(P_0) \Leftrightarrow \alpha \in WO \text{ et } |\alpha| \leq \xi \text{ et } x \in \Phi^{|\alpha|}(G_\beta), \text{ où}\\ &P_0(n, \alpha, \beta, x) \Leftrightarrow (n = 0 \text{ et } \alpha \in WO \text{ et } \forall\, q\ q \not\leq_\alpha q) \text{ ou}\\ &\qquad (n = 1 \text{ et } \alpha \in WO \text{ et } \forall\, q\ q \not\leq_\alpha q \text{ et } G(\beta, x)).\end{aligned}$$

Comme l'opérateur Ψ et P_0 sont Π_1^1, on a donc que $\Psi^\infty(P_0)$ est Π_1^1, et aussi que $(1, \alpha, \beta, x) \in \Psi^\infty(P_0) \Leftrightarrow \alpha \in WO$ et $x \in \Phi^{|\alpha|}(G_\beta)$. On a donc le résultat, puisque $R = \Psi^\infty(P_0)_1$. □

Soit ξ un ordinal dénombrable non nul. On définit $f : \omega^{<\omega} \longrightarrow \{-1\} \cup (\xi + 1)$, par récurrence sur $|s|$, comme suit : $f(\emptyset) = \xi$ et

$$f(s^\frown n) = \begin{cases} \bullet\ -1 \text{ si } f(s) \leq 0 \\ \bullet\ \theta \text{ si } f(s) = \theta + 1 \\ \bullet\ \text{un ordinal impair de } f(s) \text{ tel que la suite } (f(s^\frown n))_n \text{ soit} \\ \text{co-finale dans } f(s) \text{ et strictement croissante si } f(s) \text{ est} \\ \text{limite non nul.} \end{cases}$$

On définit alors des arbres : $T_\xi := \{s \in \omega^{<\omega} \ / \ f(s) \neq -1\}$ et $T'_\xi := \{s \in T_\xi \ / \ f(s) \neq 0\}$.

Théorème 2.3. *Soient X et Y des espaces polonais, A un borélien $pot(\mathbf{\Sigma}^0_3) \cap pot(\mathbf{\Pi}^0_3)$ de $X \times Y$, et ξ un ordinal dénombrable.*

(a) *Si ξ est pair non nul, A est non-$pot(D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1))$ si et seulement s'il existe des espaces polonais parfaits Z et T de dimension 0, des ouverts-fermés non vides A_s et B_s (l'un dans Z et l'autre dans T, pour s dans T_ξ), des surjections continues ouvertes f_s de A_s sur B_s, et des injections continues u et v tels que si $B_p := \bigcup_{s \in T_\xi \ / \ |s| \ paire} G(f_s)$ et $B_i := \bigcup_{s \in T_\xi \ / \ |s| \ impaire} G(f_s)$, on ait $\overline{B_p} = B_p \cup B_i$, $B_p \subseteq (u \times v)^{-1}(A)$, $B_i \subseteq (u \times v)^{-1}(\check{A})$, et $G(f_s) = \overline{\bigcup_{n \in \omega} G(f_{s^\frown n})} \setminus (\bigcup_{n \in \omega} G(f_{s^\frown n}))$ si $s \in T'_\xi$.*

(b) *Si ξ est impair, A est non-$pot(\check{D}_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1))$ si et seulement s'il existe des espaces polonais Z et T parfaits de dimension 0, des ouverts-fermés non vides A_s et B_s (l'un dans Z et l'autre dans T, pour s dans T_ξ), des surjections continues ouvertes f_s de A_s sur B_s, et des injections continues u et v tels que si $B_p := \bigcup_{s \in T_\xi \ / \ |s| \ paire} G(f_s)$ et $B_i := \bigcup_{s \in T_\xi \ / \ |s| \ impaire} G(f_s)$, on ait $\overline{B_i} = B_p \cup B_i$, $B_i \subseteq (u \times v)^{-1}(A)$, $B_p \subseteq (u \times v)^{-1}(\check{A})$, et $G(f_s) = \overline{\bigcup_{n \in \omega} G(f_{s^\frown n})} \setminus (\bigcup_{n \in \omega} G(f_{s^\frown n}))$ si $s \in T'_\xi$.*

Démonstration. Montrons (a), la preuve de (b) étant analogue. Supposons que A est $pot(D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1))$, en raisonnant par l'absurde ; alors $B_p = \overline{B_p} \cap (u \times v)^{-1}(A)$, l'est aussi, cette classe étant stable par intersection avec les fermés, et on trouve un G_δ dense F (resp. G) de Z (resp. T) tels que $B_p \cap (F \times G)$ soit $D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ dans $F \times G$. On trouve donc une suite croissante d'ouverts de $F \times G$, disons $(U_\eta)_{\eta<\xi}$, telle que $B_p \cap (F \times G) = \bigcup_{\eta<\xi, \eta \ impair} U_\eta \setminus (\bigcup_{\theta<\eta} U_\theta)$.

Montrons que si $\eta \leq \xi$, $s \in T_\xi$ et $f(s) = \eta$, alors $G(f_s) \cap (F \times G) \subseteq \check{U}_\eta$ si $\eta < \xi$, et $G(f_s) \cap (F \times G) \subseteq {}^c(\bigcup_{\theta<\eta} U_\theta)$ si $\eta = \xi$. On aura la contradiction cherchée avec $s = \emptyset$ et $\eta = \xi$.

On procède par récurrence sur η. Remarquons que si s est dans T_ξ, $|s|$ est paire si et seulement si $f(s)$ est pair. Si $\eta = 0$, $|s|$ est paire, donc $G(f_s) \cap (F \times G) \subseteq B_p \cap (F \times G) \subseteq \check{U}_0$.

Admettons le résultat pour $\theta < \eta$. Si η est le successeur de θ, par hypothèse de récurrence on a $G(f_{s^\frown m}) \cap (F \times G) \subseteq \check{U}_\theta$ pour tout m ; d'où, si on pose $C_s := \bigcup_{n \in \omega} G(f_{s^\frown n})$, $C_s \cap (F \times G) \subseteq \check{U}_\theta$ et $\overline{C_s \cap (F \times G)}^{F \times G} \subseteq \check{U}_\theta$. Mais comme dans la preuve du lemme 3.5 de **[Le1]**, on a $\overline{C_s \cap (F \times G)}^{F \times G} = \overline{C_s} \cap (F \times G)$, d'où l'inclusion cherchée si $\eta = \xi$.

Si $\eta < \xi$ et $|s|$ est paire, $f(s)$ est pair et θ est impair. On a les inclusions successives $G(f_s) \cap (F \times G) \subseteq B_p \cap (F \times G) \subseteq \bigcup_{\varepsilon<\xi, \varepsilon \ impair} U_\varepsilon \setminus (\bigcup_{\gamma<\varepsilon} U_\gamma) \subseteq \check{U}_{\theta+1}$.

Si $|s|$ est impaire, $f(s)$ est impair et θ est pair. Mais si $s \in T'_\xi$ est de longueur impaire, on a $G(f_s) \cap (F \times G) \subseteq (F \times G) \setminus B_p = (F \times G) \setminus (\bigcup_{\varepsilon<\xi} U_\varepsilon) \cup \bigcup_{\varepsilon<\xi\,,\,\varepsilon\ pair} U_\varepsilon \setminus (\bigcup_{\gamma<\varepsilon} U_\gamma)$, ceci parce que $G(f_s) \cap B_p = \varnothing$. On a donc le résultat en appliquant l'hypothèse de récurrence.

Si η est un ordinal limite, $(f(s^\frown n))_n$ est co-finale dans $f(s)$, donc par hypothèse de récurrence, on a $G(f_{s^\frown n}) \cap (F \times G) \subseteq \check{U}_{f(s^\frown n)}$. Si $\theta_0 < f(s)$, on trouve $n(\theta_0)$ tel que si $n(\theta_0) \leq n$, $f(s^\frown n) > \theta_0$. Donc $G(f_{s^\frown n}) \cap (F \times G) \subseteq \check{U}_{\theta_0}$ dès que $n(\theta_0) \leq n$. Or $G(f_s) \cap (F \times G) \subseteq (F \times G) \cap \overline{C_s} \setminus C_s = \overline{(F \times G) \cap C_s}^{F \times G} \setminus C_s \subseteq \overline{\bigcup_{n(\theta_0) \leq n} (F \times G) \cap G(f_{s^\frown n})}^{F \times G} \subseteq \check{U}_{\theta_0}$. Donc $G(f_s) \cap (F \times G) \subseteq {}^c(\bigcup_{\theta<\eta} U_\theta)$. Si $\eta < \xi$, comme $|s|$ est paire, on a l'inclusion $G(f_s) \cap (F \times G) \subseteq \bigcup_{\varepsilon<\xi\,,\,\varepsilon\ impair} U_\varepsilon \setminus (\bigcup_{\gamma<\varepsilon} U_\gamma)$, donc $G(f_s) \cap (F \times G) \subseteq \check{U}_\eta$.

Inversement, soit A dans $pot(\mathbf{\Sigma}^0_3) \cap pot(\mathbf{\Pi}^0_3) \setminus pot(D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1))$ dans $X \times Y$, avec X et Y polonais ; nécessairement X et Y sont non dénombrables, donc boréliennement isomorphes à ω^ω, disons par φ et ψ. Remarquons qu'on peut supposer X et Y parfaits. Soit alors β tel que $\xi < \omega_1^\beta$, tel que X et Y soient récursivement en β-présentés, tel que φ et ψ soient $\Delta^1_1(\beta)$, et tel que A et $\check{A}$ soient réunion d'une $\Delta^1_1(\beta)$-suite de G_δ pour le produit $\Delta^\beta_X \times \Delta^\beta_Y$ (où Δ^β_X est la topologie engendrée par les $\Delta^1_1(\beta)$ de X). Posons $\Omega^\beta_X := \{x \in X \ / \ \omega_1^{(\varphi(x),\beta)} \leq \omega_1^\beta\}$, $D^\beta_X := \{x \in X \ / \ x \notin \Delta^1_1(\beta)\}$, $Z_0 := \Omega^\beta_X \cap D^\beta_X$, $T_0 := \Omega^\beta_Y \cap D^\beta_Y$.

Ces espaces Z_0 et T_0, si on les munit des restrictions des topologies de Gandy-Harrington Σ^β_X (resp. Σ^β_X), sont polonais parfaits de dimension 0. En effet, Z_0 et T_0 sont $\Sigma^1_1(\beta)$ comme intersection de deux $\Sigma^1_1(\beta)$ (cf. **[Mo]**). Ceci prouve qu'ils n'ont pas de point isolé. De plus, si E est $\Sigma^1_1(\beta)$ contenu dans Ω^β_X, E est ouvert-fermé dans Ω^β_X pour la restriction de Σ^β_X : on a, si f est $\Delta^1_1(\beta)$ telle que $x \notin E \Leftrightarrow f(x) \in WO$,

$$x \in \Omega^\beta_X \setminus E \Leftrightarrow \exists\, \xi < \omega_1^\beta \ (f(x) \in WO \text{ et } |f(x)| \leq \xi) \text{ et } x \in \Omega^\beta_X$$

On en déduit que Ω^β_X est à base dénombrable d'ouverts-fermés, donc métrisable séparable ; comme il est ouvert d'un espace fortement α-favorable, il est lui-même fortement α-favorable, donc polonais (cf. **[Lo1]** pour plus de détails).

On définit $\Omega^\beta_{X \times Y} := \{(x, y) \in X \times Y \ / \ \omega_1^{(\varphi(x),\psi(y),\beta)} \leq \omega_1^\beta\}$; alors on sait que $\Omega^\beta_{X \times Y}$ rencontre tout ensemble $\Sigma^1_1(\beta)$ non vide de $X \times Y$ (cf. **[Lo1]**).

On définit ensuite par récurrence

$$F_\eta := \begin{cases} \overline{A \cap \bigcap_{\theta<\eta} F_\theta} & \text{si } \eta \text{ est pair} \\ \overline{\check{A} \cap \bigcap_{\theta<\eta} F_\theta} & \text{si } \eta \text{ est impair} \end{cases}$$

l'adhérence étant prise au sens de la topologie $\Delta^\beta_X \times \Delta^\beta_Y$.

Montrons que les F_η sont $\Sigma^1_1(\beta)$ pour $\eta \leq \xi$. On définit des $\Pi^1_1(\beta)$-opérateurs monotones sur $X \times Y$ par les formules : $\varphi(P) = P \cup \mathrm{Int}(P \cup A)$ et $\psi(P) = P \cup \mathrm{Int}(P \cup \check{A})$, où l'intérieur est pris au sens de la topologie $\Delta^\beta_X \times \Delta^\beta_Y$. Il est manifeste que, avec les notations du lemme 2.2, on a $\check{F}_\eta = \Phi^\eta(\overline{A})$ si η

est dénombrable, par récurrence transfinie. Il suffit alors d'appliquer ce lemme 2.2.

Montrons que si C et D sont co-dénombrables, alors $F_\xi \cap (C \times D) \neq \emptyset$. Pour ce faire, posons $A' := A \cap (C \times D)$. Par la remarque 2.1 de **[Le1]**, A' est non-$pot(D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1))$. Soit γ tel que β, C et D soient $\Delta^1_1(\gamma)$, et posons

$$F^\gamma_\eta := \begin{cases} \overline{A' \cap \bigcap_{\theta<\eta} F^\gamma_\theta} & \text{si } \eta \text{ est pair} \\ \overline{\check{A} \cap \bigcap_{\theta<\eta} F^\gamma_\theta} & \text{si } \eta \text{ est impair} \end{cases}$$

l'adhérence étant prise au sens de la topologie $\Delta^\gamma_X \times \Delta^\gamma_Y$. Alors il est clair que si $\eta \leq \xi$, $F^\gamma_\eta \subseteq F_\eta \cap (C \times D)$, ce par récurrence transfinie. Il suffit donc de voir que F^γ_ξ est non vide. En raisonnant par l'absurde, on va montrer que si $U_\eta = \check{F}^\gamma_\eta$, alors $A' = \bigcup_{\eta<\xi, \eta \text{ impair}} U_\eta \setminus (\bigcup_{\theta<\eta} U_\theta)$. Si η est impair et successeur de θ_0, $U_\eta \setminus (\bigcup_{\theta<\eta} U_\theta) = F^\gamma_{\theta_0} \setminus F^\gamma_\eta = F^\gamma_{\theta_0} \setminus \overline{\check{A} \cap F^\gamma_{\theta_0}} \subseteq A'$. Si maintenant x est dans A', x est dans U_ξ donc il existe un plus petit $\eta \leq \xi$ tel que x soit dans U_η. Si η est pair et successeur de θ_0, x est dans $U_\eta \setminus (\bigcup_{\theta<\eta} U_\theta) = F^\gamma_{\theta_0} \setminus F^\gamma_\eta = F^\gamma_{\theta_0} \setminus \overline{A' \cap F^\gamma_{\theta_0}} \subseteq \check{A}'$. Si η est limite, x est dans $\overline{A' \cap \bigcap_{\theta<\eta} F^\gamma_\theta} \setminus (\bigcup_{\theta<\eta} U_\theta) = \overline{A' \cap \bigcap_{\theta<\eta} F^\gamma_\theta} \cap (\bigcap_{\theta<\eta} F^\gamma_\theta) \subseteq \check{A}'$. D'où le résultat.

On en déduit que $F_\xi \cap (D^\beta_X \times D^\beta_Y)$ est un $\Sigma^1_1(\beta)$ non vide, donc qu'il rencontre l'ensemble $\Omega^\beta_{X\times Y} \subseteq \Omega^\beta_X \times \Omega^\beta_Y$, et que $F_\xi \cap (Z_0 \times T_0)$ est non vide. On remarque alors que dans la définition des F_η, pour $\eta \leq \xi$, on peut tout aussi bien prendre l'adhérence au sens de $\Sigma^\beta_X \times \Sigma^\beta_Y$ car les ensembles sous l'adhérence sont $\Sigma^1_1(\beta)$. On a donc que $F_\xi \cap (Z_0 \times T_0) = \overline{A \cap (Z_0 \times T_0) \cap \bigcap_{\eta<\xi} F_\eta}^{Z_0 \times T_0}$. L'ensemble $A \cap (Z_0 \times T_0) \cap \bigcap_{\eta<\xi} F_\eta$ est donc réunion de G_δ l.p.o. de $Z_0 \times T_0$, et le théorème 1.13 peut s'appliquer à l'un de ces G_δ qui est non vide; ce qui fournit des presque-ouverts non vides $a_\emptyset$ et $b_\emptyset$, ainsi que $g_\emptyset : a_\emptyset \longrightarrow b_\emptyset$ surjective continue ouverte.

On construit alors, pour s dans T_ξ, des suites (a_s) et (b_s) de presque-ouverts (l'un dans Z_0, l'autre dans T_0), une suite (g_s) de surjections continues ouvertes de a_s sur b_s, des suites denses $(x^s_n)_n$ de a_s vérifiant :

$$\text{(i)} \quad G(g_s) \subseteq \begin{cases} (Z_0 \times T_0) \cap \bigcap_{n\in\omega} F_{f(s^\frown n)} \cap A & \text{si } |s| \text{ est paire} \\ \qquad ((Z_0 \times T_0) \cap A & \text{si } f(s) = 0) \\ (Z_0 \times T_0) \cap \bigcap_{n\in\omega} F_{f(s^\frown n)} \cap \check{A} & \text{si } |s| \text{ est impaire} \end{cases}$$

(ii) $G(g_{s^\frown n})$ (ou $G(g_{s^\frown n})^*$) $\subseteq \mathscr{B}[(x^s_n, g_s(x^s_n)), 2^{-\Sigma_{i\leq|s|}\,(s^\frown n(i)+1)}]$ si $s \in T'_\xi$.

Admettons avoir construit g_s pour $|s| \leq p$, et soient s de longueur p, et $(x^s_n)_n$ une suite dense de a_s. Alors si p est pair et n entier, $G(g_s) \subseteq F_{f(s^\frown n)} \cap (Z_0 \times T_0)$, qui est égal à $\overline{(Z_0 \times T_0) \cap \bigcap_{m\in\omega} F_{f(s^\frown n^\frown m)} \setminus A}$. D'où $G(g_s) \subseteq \overline{(Z_0 \times T_0) \cap \bigcap_{m\in\omega} F_{f(s^\frown n^\frown m)} \setminus A}$. On peut alors appliquer le théorème 1.13 à l'un des ensembles G_δ et $\Sigma^1_1(\beta)$ non vides dont l'intersection $\bigcap_{m\in\omega} F_{f(s^\frown n^\frown m)} \setminus A \cap \mathscr{B}[(x^s_n, g_s(x^s_n)), 2^{-\Sigma_{i\leq|s|}\,(s^\frown n(i)+1)}]$ (ou alors l'intersection $\bigcap_{m\in\omega} F_{f(s^\frown n^\frown m)} \setminus A \cap \mathscr{B}[(g_s(x^s_n), x^s_n), 2^{-\Sigma_{i\leq|s|}\,(s^\frown n(i)+1)}]$) est la réunion, dans le produit $Z_0 \times T_0$, ce qui fournit le graphe recherché. De même si p est impair.

On choisit alors α tel que Z_0 et T_0 soient récursivement en α-présentés, et tel que pour tout $s \in T_\xi$ et pour tout $p \in \omega$, $\bigcup_{n\in\omega} G(g_{s^\frown n})$, $G(g_s)$ et $\bigcup_{s\in\omega^{\leq p}} G(g_s)$ soient $\Delta^1_1(\alpha)$. On prend des notations analogues aux précédentes. Soit M_0 (resp. N_0) un G_δ dense $\Sigma^1_1(\alpha)$ de Z_0 (resp. T_0), fourni par le lemme 2.1, sur lequel la topologie de Z_0 (resp. T_0) coïncide avec la topologie $\Delta^\alpha_{Z_0}$ (resp. $\Delta^\alpha_{T_0}$). On définit maintenant les objets recherchés :

$$Z := M_0 \cap \Omega^\alpha_{Z_0} \cap D^\alpha_{Z_0}, \qquad T := N_0 \cap \Omega^\alpha_{T_0} \cap D^\alpha_{T_0},$$

$$G(f_s) := \begin{cases} G(g_s) \cap (Z \times T) & \text{si } f(s) = 0 \\ G(g_s) \cap \overline{C_s}^{Z\times T} & \text{si } s \in T'_\xi \end{cases}$$

A_s et B_s sont les projections de $G(f_s)$, et u (resp. v) est l'application identique de Z dans X (resp. T dans Y). Vérifions que ces objets conviennent. Montrons que si $s \in T_\xi$, alors $G(f_s) = G(g_s) \cap (Z \times T)$.

La relation est vraie par définition si $f(s) = 0$. Admettons-la pour $f(s) < \eta \leq \xi$; soit $s \in T_\xi$ tel que $f(s) = \eta > 0$. On a bien sûr que $G(f_s) \subseteq G(g_s) \cap (Z \times T)$.

Mais on a

$$G(f_s) = G(g_s) \cap \overline{\bigcup_{n\in\omega} G(f_{s^\frown n})}^{Z\times T} = G(g_s) \cap \overline{\bigcup_{n\in\omega} G(g_{s^\frown n}) \cap (Z \times T)}^{Z\times T},$$

par hypothèse de récurrence. Montrons donc que $G(g_s) \cap (Z \times T)$ est inclus dans $\overline{\bigcup_{n\in\omega} G(g_{s^\frown n}) \cap (Z \times T)}^{Z\times T}$. On a $G(g_s) \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\omega} G(g_{s^\frown n})}^{Z_0\times T_0}$ car si O est ouvert-fermé et contient $(x, g_s(x))$, on trouve une suite strictement croissante $(n_q)_q$ telle que $(x^s_{n_q})_q$ converge vers x. Par continuité de g_s, la suite image converge vers $g_s(x)$, et on trouve q tel que $\mathscr{B}[(x^s_{n_q}, g_s(x^s_{n_q})), 2^{-\Sigma_{i\leq |s|}(s^\frown n_q(i)+1)}] \subseteq O$, et $G(g_{s^\frown n_q}) \subseteq O$ (ou $G(g_{s^\frown n_q}) \subseteq O^*$). On a que $\Omega^\alpha_{Z_0}$ est co-maigre dans Z_0. En effet, Z_0 est polonais parfait de dimension 0 et non vide, donc on peut choisir l'isomorphisme avec ω^ω de façon à préserver les ensembles co-maigres ; il suffit alors de consulter **[Ke]**, où il est démontré que $\Omega^\alpha_{\omega^\omega}$ est co-maigre dans ω^ω. Donc Z (resp. T) est co-maigre dans Z_0 (resp. T_0) et $G(g_s) \cap (Z \times T) \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\omega} G(g_{s^\frown n}) \cap (Z \times T)}^{Z_0\times T_0} \cap (Z \times T)$. Or ce dernier ensemble est $\overline{\bigcup_{n\in\omega} G(g_{s^\frown n}) \cap (Z \times T)}^{Z\times T}$, car sur Z (resp. T), les topologies initiales et $\Delta^\alpha_{Z_0}$ (resp. $\Delta^\alpha_{T_0}$) coïncident, et car on a un $\Sigma^1_1(\alpha)$ sous l'adhérence, donc les adhérences pour $\Delta^\alpha_{Z_0} \times \Delta^\alpha_{T_0}$ et $\Sigma^\alpha_{Z_0} \times \Sigma^\alpha_{T_0}$ sont les mêmes.

Comme $\Omega^\alpha_{Z_0} \cap D^\alpha_{Z_0}$, muni de la restriction de la topologie de Gandy-Harrington, est polonais parfait de dimension 0, Z l'est aussi puisqu'il en est un ouvert. De même pour T. Les seules choses non évidentes à vérifier sont que $G(f_s)$ n'est pas vide, l'inclusion $\overline{C_s} \setminus C_s \subseteq G(f_s)$, et que $\overline{B_p} = B_p \cup B_i$.

L'ensemble $G(f_s)$ est non vide puisqu'il est égal à $G(g_s) \cap (Z \times T)$ et que Z (resp. T) est co-maigre dans Z_0 (resp. T_0).

Soit (x, y) dans $\overline{C_s}^{Z\times T} \setminus C_s$, $((x_n, y_n))$ dans C_s convergeant vers (x, y), et p_n tel que $(x_n, y_n) \in G(f_{s^\frown p_n})$. Comme $G(f_{s^\frown p_n})$ est fermé dans $Z \times T$, on peut supposer la suite (p_n) strictement croissante. La distance de (x_n, y_n)

à $G(g_s)$, dans $Z_0 \times T_0$, est au plus $2^{-\Sigma_{i\leq |s|}\ (s^\frown p_n(i)+1)}$, et comme la convergence a lieu aussi dans $Z_0 \times T_0$, on a $(x, y) \in \overline{G(g_s)}^{Z_0\times T_0}$.

Mais on a l'égalité $\overline{G(g_s)}^{Z_0\times T_0} \cap (Z \times T) = \overline{G(g_s) \cap (Z \times T)}^{Z_0\times T_0} \cap (Z \times T)$ car Z et T sont co-maigres, d'où $(x, y) \in \overline{G(f_s)}^{Z\times T}$, comme précédemment. Comme le graphe de f_s est fermé, on a bien $(x, y) \in G(f_s)$.

Montrons par récurrence sur p que $G(f_\emptyset) \cup \bigcup_{|s|<p,\, s\in T'_\xi} C_s$ est fermé. C'est clair pour $p = 0$. Admettons donc que c'est vrai pour p. On a les égalités

$$G(f_\emptyset) \cup \bigcup_{|s|<p+1} C_s = G(f_\emptyset) \cup \bigcup_{|s|<p} C_s \cup \bigcup_{s\in\omega^p} C_s = G(f_\emptyset) \cup \bigcup_{|s|<p} C_s \cup \bigcup_{s\in\omega^{p+1}} G(f_s).$$

Soit $((x_m, y_m)) \subseteq G(f_\emptyset) \cup \bigcup_{|s|<p+1} C_s$ convergeant vers (x, y). Alors par hypothèse de récurrence, on peut supposer que pour chaque m il existe (s_m, n_m) tel que (x_m, y_m) soit dans $G(f_{s_m^\frown n_m})$. Les ensembles $G(f_{s^\frown n})$ étant fermés, on peut supposer que la suite $(\Sigma_{i\leq p}\ (s_m^\frown n_m(i) + 1))_m$ tend vers l'infini. La distance de (x_m, y_m) à $G(g_{s_m})$, dans $Z_0 \times T_0$, est au plus $2^{-\Sigma_{i\leq p}\ (s_m^\frown n_m(i)+1)}$, donc comme la convergence a lieu aussi dans $Z_0 \times T_0$, on a

$$(x, y) \in \overline{G(g_\emptyset) \cup \bigcup_{(s,n)\in\omega^{<p}\times\omega} G(g_{s^\frown n})}^{Z_0\times T_0} \cap (Z \times T).$$

Mais en raisonnant comme précédemment, on voit que

$$(x, y) \in \overline{G(f_\emptyset) \cup \bigcup_{s\in\omega^{<p}} C_s}^{Z\times T} = G(f_\emptyset) \cup \bigcup_{s\in\omega^{<p}} C_s$$

par hypothèse de récurrence. Donc $(x, y) \in G(f_\emptyset) \cup \bigcup_{s\in\omega^{<p+1}} C_s$, qui est donc fermé.

On a que $G(f_\emptyset) \cup \bigcup_{s\in T'_\xi} C_s$ est fermé. En effet, si $((z_m, t_m)) \subseteq G(f_\emptyset) \cup \bigcup_{s\in T'_\xi} C_s$ converge vers (z, t), par ce qui précède on peut supposer que pour chaque m il existe s'_m tel que (z_m, t_m) soit dans $G(f_{s'_m})$, et que la suite $(|s'_m|)_m$ tend vers l'infini. Alors on trouve p tel que l'ensemble des $s'_m(p)$ soit infini. En effet, si tel n'est pas le cas, $\{s \in T_\xi \ /\ \exists\ m\ s \prec s'_m\}$ est un sous-arbre infini de T_ξ, à branchements finis, donc a une branche par le lemme de König ; mais ceci contredit la bonne fondation de T_ξ. On peut donc supposer qu'il existe p tel que la suite $(s'_m\lceil p)_m$ soit constante, disons à s, et tel que la suite $(s'_m(p))_m$ tende vers l'infini. Alors par l'inégalité triangulaire on a que la distance de (z_m, t_m) à $G(g_s)$, dans $Z_0 \times T_0$, est au plus $2^{-s'_m(p)}$, donc comme la convergence a lieu aussi dans $Z_0 \times T_0$, on a $(z, t) \in \overline{G(g_s)}^{Z_0\times T_0} \cap (Z \times T)$. Mais comme avant, on en déduit que $(z, t) \in G(f_s) \subseteq G(f_\emptyset) \cup \bigcup_{s\in T'_\xi} C_s$.

On a donc que $\overline{B_p} \subseteq G(f_\emptyset) \cup \bigcup_{s\in T'_\xi} C_s$. Si $|s|$ est paire, on montre que $C_s \subseteq \overline{B_p}$, ce qui montrera que $\overline{B_p} = G(f_\emptyset) \cup \bigcup_{s\in T'_\xi} C_s = B_p \cup B_i$. Or on a :

$$C_s = \bigcup_{n\in\omega} G(f_{s^\frown n}) \subseteq \bigcup_{n\in\omega} \overline{C_{s^\frown n}} \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\omega} C_{s^\frown n}} \subseteq \overline{B_p}. \quad \square$$

Par **[Lo-SR]**, on a, pour $\xi < \omega_1$ impair, l'existence d'un compact K_ξ et d'un vrai $D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ de K_ξ, disons B_ξ, tel que si A est borélien d'un espace polonais

P, A n'est pas $\check{D}_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)$ de P si et seulement s'il existe $f : K_\xi \longrightarrow P$ injective continue telle que $f^{-1}(A) = B_\xi$. On a ici un analogue : si A est borélien d'un produit d'espaces polonais, A est non-$pot(\check{D}_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1))$ si et seulement s'il existe $B \in D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1)\lceil\overline{B} \setminus pot(\check{D}_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1))$ et des injections continues u et v tels que $B = \overline{B} \cap (u \times v)^{-1}(A)$. Bien sûr, B dépend ici de A, mais est toujours du même type $(B = D((\bigcup_{f(s)\leq\eta} G(f_s))_{\eta<\xi}))$.

On va maintenant donner des versions du théorème 2.3 dans le cas où A est à coupes verticales dénombrables, et dans le cas où $\xi = 1$.

Lemme 2.4. (a) *Soient X et Y des espaces polonais, A (resp. B) un borélien de X (resp. Y), et $f : A \longrightarrow B$ countable-to-one borélienne. Alors il existe une partition de A en ensembles boréliens, disons $(A_n)_{n\in\omega}$, telle que les restrictions de f à A_n soient injectives.*

(b) *Soient X et Y des espaces polonais, A (resp. B) un presque-ouvert non vide de X (resp. Y), et $g : B \longrightarrow A$ surjective continue ouverte countable-to-one. Alors il existe un presque-ouvert non vide A' (resp. B') de X (resp. Y), contenu dans A (resp. B), tel que la restriction de g à B' soit un homéomorphisme de B' sur A'.*

Démonstration. (a) On peut écrire, par le théorème de Lusin, que l'ensemble défini par $Gr(f)^* := \{(y, x) \ / \ (x, y) \in Gr(f)\}$ est la réunion dénombrable des graphes de fonctions boréliennes partielles, disons f_n, définies sur des boréliens. Puisque leur graphe est contenu dans $Gr(f)^*$, les f_n sont injectives, donc leurs images C_n sont boréliennes. Il reste à poser $A_n := C_n \setminus \bigcup_{p<n} C_p$.

(b) Soit (B_n) une partition borélienne de B donnée par le (a). Comme B est non maigre relativement à Y, l'un des B_n est non maigre. Ce dernier ayant la propriété de Baire s'écrit comme réunion disjointe d'un G_δ non maigre G de Y et d'une partie maigre M. Soit U un ouvert non vide de Y tel que $G\Delta U$ soit maigre, et posons $B'' := U \cap G$. Cet ensemble est un G_δ dense de $B \cap U$, qui est ouvert de B, donc $g[B'']$ est un analytique co-maigre de l'ouvert $g[B \cap U]$ de A. Soient donc (U_n) une base de la topologie de B'', V_n des ouverts de $g[B \cap U]$ tels que $g[U_n]\Delta V_n$ soit un maigre M_n dans $g[B \cap U]$, et A' un G_δ dense de $g[B \cap U]$ contenu dans $g[B''] \setminus \bigcup_{n\in\omega} M_n$. Alors on peut poser $B' := B'' \cap g^{-1}(A')$, comme on le vérifie facilement. □

Théorème 2.5. *Soient X et Y des espaces polonais, A un borélien à coupes verticales dénombrables de $X \times Y$, et ξ un ordinal dénombrable non nul.*

(a) *Si ξ est pair, A est non-$pot(D_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1))$ si et seulement s'il existe des espaces polonais parfaits Z et T de dimension 0, des ouverts-fermés non vides A_s et B_s (l'un dans Z et l'autre dans T, pour s dans T_ξ, et dans cet ordre si $|s|$ est paire), des surjections continues ouvertes f_s de A_s sur B_s, et des injections continues u et v tels que si $C_s := \bigcup_{n\in\omega} G(f_{s^\frown n})$, on ait $G(f_s) \subseteq \overline{C_s} \setminus (\bigcup_{t\in T'_\xi \ / \ parité(|t|)=parité(|s|)} C_t)$, et si $B := \bigcup_{s\in T_\xi \ / \ |s| \ paire} G(f_s)$, $B = (u \times v)^{-1}(A)$.*

(b) *Si ξ est impair, A est non-$pot(\check{D}_\xi(\mathbf{\Sigma}^0_1))$ si et seulement s'il existe des espaces polonais Z et T parfaits de dimension 0, des ouverts-fermés non vides A_s et B_s (l'un dans Z et l'autre dans T, pour s dans T_ξ, et dans cet ordre si $|s|$ est impaire), des surjections continues ouvertes f_s de A_s sur B_s, et des injections continues u et v tels que si $C_s := \bigcup_{n\in\omega} G(f_{s^\frown n})$, on ait*

$G(f_s) \subseteq \overline{C_s} \setminus (\bigcup_{t \in T'_\xi \ / \ parité(|t|)=parité(|s|)} C_t)$, *et si* $B := \bigcup_{s \in T_\xi \ / \ |s| \ impaire} G(f_s)$, *on ait* $B = (u \times v)^{-1}(A)$.

Démonstration. Elle est identique à la preuve du théorème 2.3, à ceci près qu'on remplace la condition (ii) par

$$Gr(g_{s^\frown n}) \quad (\text{ou } Gr(g_{s^\frown n})^*) \subseteq \mathscr{B}[(x_n^s, g_s(x_n^s)), 2^{-\Sigma_{i \leq |s|} (s^\frown n(i)+1)}]$$

si $s \in T'_\xi$ et $f(s) \neq 1$, et $A \cap (Z_0 \times T_0) = \bigcup_{n \in \omega} Gr(g_{s^\frown n})$ si $f(s) = 1$. Si A est la $\Delta_1^1(\beta)$-réunion de (h_n), on prend pour la suite $(Gr(g_{s^\frown n}))_n$ la suite des traces de $Gr(h_n)$ sur $Z_0 \times T_0$ qui sont non vides (ceci si $f(s) = 1$). Si $f(s) > 0$ est pair, on raisonne comme dans la preuve de 2.3 pour construire g_s, à ceci près que si le graphe n'est pas contenu dans $Z_0 \times T_0$ mais dans $T_0 \times Z_0$, on applique le lemme 2.4 pour avoir le graphe dans le sens souhaité. □

Théorème 2.6. *Soient* X *et* Y *des espaces polonais,* A *un borélien à coupes verticales dénombrables de* $X \times Y$. *Alors* A *est non-*$pot(\mathbf{\Pi}_1^0)$ *si et seulement s'il existe des espaces polonais* Z *et* T *parfaits de dimension* 0, *une suite d'ouverts-fermés* (A_n) *(resp.* (B_n)*) de* Z *(resp.* T*), des surjections continues ouvertes* f_n *de* A_n *sur* B_n, *et des fonctions continues* u *et* v *tels que si* $B = \bigcup_{n>0} Gr(f_n)$, *on ait* $\emptyset \neq Gr(f_0) \subseteq \overline{B} \setminus B$ *et* $B = (u \times v)^{-1}(A)$.

Démonstration. Elle est identique à celle du théorème 2.5 si $a_\emptyset \subseteq Z_0$. Dans le cas où $a_\emptyset \subseteq T_0$, on montre comme dans 2.5 que l'ensemble L défini comme étant $G(g_\emptyset) \cap [(M_0 \cap \Omega_{Z_0}^\alpha \cap D_{Z_0}^\alpha) \times (N_0 \cap \Omega_{T_0}^\alpha \cap D_{T_0}^\alpha)] \cap \overline{A \cap (Z_0 \times T_0)}^{\Sigma_{Z_0}^\alpha \times \Sigma_{T_0}^\alpha}$ est non vide. On définit alors A_0 comme étant la projection de L sur T_0, $B_0 := Z := T := A_0$; f_0 est l'application identique. Soient $(h_n)_{n>0}$ comme dans la preuve de 2.5, E_n le domaine de h_n, D_0 la projection de L sur Z_0, et $g_0 : A_0 \longrightarrow D_0$ la restriction de $g_\emptyset$ à A_0. On définit $A_n := g_0^{-1}(h_n^{-1}(A_0))$, $B_n := A_0 \cap h_n[E_n \cap D_0]$, et f_n comme étant la restriction de $h_n \circ g_0$ à A_n, si $n > 0$. Enfin, on pose $u := g_0$, $v(y) = y$ si $y \in A_0$. Vérifions que ces objets conviennent. Si $x \in A_0$, $(x, x) \notin B$ sinon $(g_0(x), x) \in A \cap Gr(g_\emptyset)^*$. Si U est un ouvert de A_0 contenant x, $g_0[U] \times U$ est un ouvert de $(M_0 \cap \Omega_{Z_0}^\alpha \cap D_{Z_0}^\alpha) \times (N_0 \cap \Omega_{T_0}^\alpha \cap D_{T_0}^\alpha)$ contenant $(g_0(x), x)$, donc rencontre A en un point (z, y) ; $z = g_\emptyset(t)$, où $t \in U$, et $(t, y) \in U^2 \cap B \neq \emptyset$. Donc $\Delta(A_0) = Gr(f_0) \subseteq \overline{B} \setminus B$.

Enfin, $(x, y) \in B \Leftrightarrow \exists \ n \ y = h_n(g_0(x)) \Leftrightarrow \exists \ n \ (g_0(x), y) \in Gr(h_n) \Leftrightarrow (g_0(x), y) \in A$. □

Soit C_0 la classe des fonctions de la forme $(x, y) \longmapsto (u(x), v(y))$ ou $(x, y) \longmapsto (u(y), v(x))$, où les fonctions u et v sont boréliennes.

Théorème 2.7. *Soient* X *et* Y *des espaces polonais,* A *un borélien* $pot(\mathbf{\Sigma}_3^0) \cap pot(\mathbf{\Pi}_3^0)$ *de* $X \times Y$.

(a) A *est non-*$pot(\mathbf{\Pi}_1^0)$ *si et seulement s'il existe des espaces polonais* Z' *et* T' *parfaits de dimension* 0, *une suite d'ouverts-fermés* (A_n) *(resp.* (B_n)*) de* Z' *(resp.* T'*), des surjections continues ouvertes* f_n *de* A_n *sur* B_n, *et une fonction continue* f *de* C_0 *tels que si* $B = \bigcup_{n>0} Gr(f_n)$, *on ait* $\emptyset \neq Gr(f_0) = \overline{B} \setminus B$ *et* $B = f^{-1}(A) \cap \overline{B}$.

(b) A *est non-*$pot(\mathbf{\Pi}_1^0)$ *si et seulement s'il existe des espaces polonais* Z *et* T *parfaits de dimension* 0 *non vides, une suite d'ouverts denses* (E_n) *de* Z, *des* *applications continues ouvertes* g_n *de* E_n *dans* T, *et une fonction continue* g *de* C_0 *tels que* $(g_n)_{n>0}$ *converge uniformément vers* g_0 *sur* $\bigcap_{n\in\omega} E_n$, $Gr(g_0) \subseteq g^{-1}(\check{A})$ *et* $\bigcup_{n>0} Gr(g_n) \subseteq g^{-1}(A)$.

Démonstration. (a) Dans le cas où $a_\varnothing \subseteq Z_0$, la preuve est identique à celle du théorème 2.3 jusqu'à la construction des g_s comprise. Soient $I_0 := \{n/a_{(n)} \subseteq Z_0\}$, $I_1 := \{n/a_{(n)} \subseteq T_0\}$, $J_0 := \overline{\bigcup_{n\in I_0} Gr(g_{(n)})}^{Z_0\times T_0}$, $J_1 := \overline{\bigcup_{n\in I_1} Gr(g_{(n)})^*}^{Z_0\times T_0}$. Alors $Gr(g_\varnothing) \subseteq J_0 \cup J_1$, donc on trouve i et un ouvert-fermé $U\times V$ de $Z_0\times T_0$ tels que $\varnothing \neq Gr(g_\varnothing)\cap(U\times V) \subseteq J_i$. Supposons par exemple que $i=0$. Soit g_0 la restriction de $g_\varnothing$ à $U\cap g_0^{-1}(V)$, et $B' := \bigcup_{n\in I_0} Gr(g_{(n)})$; on a donc $Gr(g_0) \subseteq \overline{B'}^{Z_0\times T_0}$. On conclut de manière analogue à celle de 2.3 : on introduit α, on montre que l'ensemble $K := Gr(g_0)\cap(Z\times T)\cap \overline{B'\cap[(Z\cap U)\times(T\cap V)]}^{\Sigma^\alpha_{Z_0}\times\Sigma^\alpha_{T_0}}$ est non vide, ce qui implique que I_0 est infini ; on indexe alors B' par ω. On définit A_0 et B_0 (resp. A_n et B_n) comme étant les projections de K (resp. $Gr(g_{(n)})\cap[(Z\cap U)\times(T\cap V)]$), et on pose $f_0 := g_0\lceil A_0$, $f_n := g_{(n)}\lceil A_n$ si $n>0$, $Z' := Z\cap U$, $T' := T\cap V$, et f est l'application identique.

Si maintenant $i=1$, on montre comme dans 2.6 qu'on peut trouver deux fonctions continues u et v, un espace polonais Z' parfait de dimension 0, et des applications continues et ouvertes définies sur et d'images des ouverts-fermés de Z', φ_n, tels que si $A' := \bigcup_{n>0} Gr(\varphi_n)$, on ait : $\Delta(Z') \subseteq (v\times u)^{-1}(Gr(\varphi_0))$, $Gr(\varphi_0) \subseteq Gr(g_\varnothing)\cap(U\times V)$, $A'^* \subseteq (v\times u)^{-1}(A)$, et $\Delta(Z') \subseteq \overline{A'}\setminus A'$. Soit (t_n) une suite dense de Z'. Alors on construit des rectangles ouverts-fermés W_n de Z'^2 de diamètre au plus 2^{-n} et une suite strictement croissante (m_n) telle que l'on ait : $(t_n, t_n)\in W_n$, $\varnothing\neq Gr(\varphi_{m_n})\cap W_n \subseteq {}^c(\bigcup_{p<n} Gr(\varphi_{m_p}))$.

Il est maintenant clair qu'on peut poser $A_0 := B_0 := T' := Z'$, $f_0 := Id_{A_0}$; si $n>0$, A_n et B_n sont les projections de $Gr(\varphi_{m_n})\cap W_n$, et f_n est la restriction de φ_{m_n} à A_n ; enfin, $f(x,y) := (v(y), u(x))$.

Le cas où $a_\varnothing \subseteq T_0$ se traite de façon analogue.

(b) Supposons que A est $pot(\mathbf{\Pi}^0_1)$, en raisonnant par l'absurde. Alors si on pose $G := \bigcap_{n\in\omega} E_n$, $\bigcup_{n\in\omega} Gr(g_n)\cap(G\times T)$ est borélien à coupes fermées, donc on trouve un G_δ dense $H\subseteq G$ tel que $\bigcup_{n\in\omega} Gr(g_n)\cap(H\times T)$ soit fermé dans $H\times T$. Par ailleurs, $g^{-1}(A)\cap\bigcup_{n\in\omega} Gr(g_n)\cap(H\times T) = \bigcup_{n>0} Gr(g_n)\cap(H\times T)$ est $pot(\mathbf{\Pi}^0_1)$, donc on trouve un G_δ dense $K\subseteq T$ tel que les coupes de $E := \bigcup_{n>0} Gr(g_n)\cap(H\times K)$ soient fermées dans K. Alors $H\cap\bigcap_{n\in\omega} g_n^{-1}(K)$ est un G_δ dense de Z, et si x est dans ce G_δ, $g_0(x)$ est dans $\overline{E_x}\setminus E_x$, au sens de K, ce qui est la contradiction cherchée.

Inversement, soient Z', T', A_n, B_n, f_n, f, fournis par le (a). Posons, si $n>0$,

$$H_n := \{P\subseteq \mathbf{\Delta}^0_1\lceil A_0\setminus\{\varnothing\}\ \forall(U,V)\in P^2\ (U\neq V\Rightarrow U\cap V=\varnothing)$$
$$\text{et } \exists p>0\ (U\subseteq A_p \text{ et } \forall x\in U\ d(f_0(x), f_p(x))] < 2^{-n})\}$$

Alors H_n est non vide, puisqu'il contient $\varnothing$, et il est ordonné de manière inductive par l'inclusion, donc il admet un élément maximal $P_n := \{U^n_m \mid m\in I_n\}$. Posons $E_n := \bigcup_{m\in I_n} U^n_m$; E_n est dense dans A_0, par maximalité de P_n. On pose alors $Z := A_0$, $T := T'$, $g := f\lceil(Z\times T)$, $E_0 := A_0$, $g_0 := f_0$, et si $n>0$, $g_n(x) := f_{p_m}(x)$ si $x\in U^n_m$, où bien sûr p_m est minimal tel que $U^n_m\subseteq A_{p_m}$ et $\forall\ x\in U^n_m\ d(f_0(x), f_{p_m}(x)) < 2^{-n}$. Ces objets répondent clairement au problème. □

Lemme 2.8. *Soient X et Y des espaces polonais, A un borélien à coupes verticales dénombrables de $X \times Y$, et k un entier naturel non nul. Alors $\Gamma_A \neq D_k(\mathbf{\Sigma}_1^0)^+$, $\check{D}_{2k}(\mathbf{\Sigma}_1^0)$, et $D_{2k-1}(\mathbf{\Sigma}_1^0)$ (Γ_A est la plus petite classe de Wadge Γ telle que $A \in pot(\Gamma)$, pour l'inclusion—cf.* **[Le1]** *; Γ^+ est le successeur de Γ).*

Démonstration. Elle repose sur le fait que si B est borélien à coupes verticales dénombrables et est $pot(\mathbf{\Sigma}_1^0)$, B est en fait $pot(\mathbf{\Delta}_1^0)$ (puisque sa projection est dénombrable).

Il suffit de montrer que $\Gamma_A \neq \check{D}_{2k}(\mathbf{\Sigma}_1^0)$, la preuve de la troisième assertion étant analogue et celle de la première se déduisant des deux autres.

Supposons que $A = \check{U}_{2k-1} \cup U_0 \cup (U_2 \setminus U_1) \cup ... \cup (U_{2k-2} \setminus U_{2k-3})$; on a alors aussi $A = {}^c(U_{2k-1} \setminus U_0) \cup [(U_2 \setminus U_0) \setminus (U_1 \setminus U_0)] \cup ... \cup [(U_{2k-2} \setminus U_0) \setminus (U_{2k-3} \setminus U_0)]$. Donc si on pose $V_{2k-1} := X \times Y$ et $V_p := U_{p+1} \setminus U_0$ si $p < 2k-1$, on a $A = (V_1 \setminus V_0) \cup ... \cup (V_{2k-1} \setminus V_{2k-2})$. □

Corollaire 2.9. *Soient X et Y des espaces polonais, A un borélien à coupes verticales dénombrables de $X \times Y$, et k un entier naturel non nul. Alors on a les équivalences suivantes :*

(a) *A est non-$pot(\mathbf{\Delta}_1^0)$ $\Leftrightarrow$ A est non-$pot(\mathbf{\Sigma}_1^0)$ $\Leftrightarrow$ la projection de A sur Y est non dénombrable.*

(b) *A est non-$pot(\check{D}_{2k-1}(\mathbf{\Sigma}_1^0))$ $\Leftrightarrow$ A est non-$pot(\check{D}_{2k}(\mathbf{\Sigma}_1^0))$ $\Leftrightarrow$ A est non-$pot(D_{2k-1}(\mathbf{\Sigma}_1^0)^+)$.*

(c) *A est non-$pot(D_{2k+1}(\mathbf{\Sigma}_1^0))$ $\Leftrightarrow$ A est non-$pot(D_{2k}(\mathbf{\Sigma}_1^0))$ $\Leftrightarrow$ A est non-$pot(D_{2k}(\mathbf{\Sigma}_1^0)^+)$.*

Ce résultat, couplé avec le théorème 2.5, donne des caractérisations des ensembles potentiellement différences finies d'ouverts parmi les boréliens à coupes verticales dénombrables. Les classes $\{\emptyset\}$, $\mathbf{\Delta}_1^0$, $D_{2n+2}(\mathbf{\Sigma}_1^0)$, et $\check{D}_{2n+1}(\mathbf{\Sigma}_1^0)$ sont les seules de la forme Γ_A, avec A borélien à coupes verticales dénombrables potentiellement différences finies d'ouverts, comme on le voit avec les résultats précédents et les ensembles suivants :

$A_{2n+2} := \{(\alpha, \beta) \in \mathbf{2}^\omega \times \mathbf{2}^\omega$ / le nombre d'entiers où α et β diffèrent est impair $\leq 2n+1\}$

$A_{2n+1} := \{(\alpha, \beta) \in \mathbf{2}^\omega \times \mathbf{2}^\omega$ / le nombre d'entiers où α et β diffèrent est pair $\leq 2n\}$

Vérifions-le pour A_{2n+2}, par exemple. Il est clairement $D_{2n+2}(\mathbf{\Sigma}_1^0)$, puisque si on pose $U_p := \{(\alpha, \beta) \in \mathbf{2}^\omega \times \mathbf{2}^\omega \ / \ \exists\, s \in \omega^{2n+2-p} \ i \neq j \Rightarrow s(i) \neq s(j)$ et $\forall\, i < |s| \ \alpha(s(i)) \neq \beta(s(i))\}$, $A_{2n+2} = \bigcup_{p<2n+2,\ p \text{ impair}} U_p \setminus U_{p-1}$; pour voir qu'il est non-$pot(\check{D}_{2n+2}(\mathbf{\Sigma}_1^0))$, il suffit par le corollaire 2.9 de voir qu'il est non-$pot(\check{D}_{2n+1}(\mathbf{\Sigma}_1^0))$. On va pour ce faire appliquer le théorème 2.5. On pose $f_\emptyset(\alpha) = \alpha$, et si $|t| \leq 2n$, $f_{t^\frown m}(\alpha)(p) = f_t(\alpha)(p) \Leftrightarrow p \neq m$. Posons également $\phi_m(\alpha)(p) = \alpha(p) \Leftrightarrow p \neq m$. Alors ϕ_m est un homéomorphisme, et comme $f_{t^\frown m} = \phi_m \circ f_t$, on a par récurrence que les f_t sont des homéomorphismes de $\mathbf{2}^\omega$ sur lui-même. Par récurrence sur $|t| \leq 2n+1$, on voit que le nombre de p tels que $\alpha(p) \neq f_t(\alpha)(p)$ a même parité que $|t|$ et est $\leq |t|$. On en déduit que $\bigcup_{s \in \omega^{\leq 2n+1} \ / \ |s| \text{ paire}} C_s \subseteq A_{2n+2}$. Enfin, si $\alpha \neq \beta$ en $n_0 < n_1 < ... < n_{2p}$, avec $p \leq n$, et si on pose $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_{l+1} = \phi_{n_l}(\alpha_l)$ si $l \leq 2p$, $\alpha_{2p+1} = \beta$, et $s = (n_0, ..., n_{2p})$, on vérifie que si $q \leq 2p+1$, $\alpha_q = f_{s\lceil q}(\alpha)$; d'où $(\alpha, \beta) \in C_{s\lceil 2p}$.

Dans **[SR]**, il est démontré le résultat suivant, dû à Hurewicz :

Théorème 2.10. *Soit X un espace polonais, et A un borélien de X. Alors A est non-$\mathbf{\Pi}_2^0$ si et seulement s'il existe E dénombrable sans point isolé tel que $\overline{E} \setminus E \approx \omega^\omega$ et $E = A \cap \overline{E}$.*

Théorème 2.11. *Soient X et Y des espaces polonais, A un borélien de $X \times Y$ à coupes verticales dénombrables. Alors A est non-$pot(\mathbf{\Pi}_2^0)$ si et seulement s'il existe des espaces polonais Z et T parfaits de dimension 0 non vides, des injections continues u et v, une suite (A_n) d'ouverts denses de Z, une suite (f_n) d'applications continues et ouvertes de A_n dans T, tels que pour tout x dans $\bigcap_{n\in\omega} A_n$, l'ensemble $E_x := \{f_n(x) \ / \ n \in \omega\}$ soit sans point isolé, $\overline{E_x} \setminus E_x \approx \omega^\omega$, et $E_x = (u \times v)^{-1}(A)_x \cap \overline{E_x}$.*

Démonstration. Supposons que A soit $pot(\mathbf{\Pi}_2^0)$, en raisonnant par l'absurde. Alors il existe un G_δ dense K de T tel que les coupes verticales de $(Z \times K) \cap (u \times v)^{-1}(A)$ soient G_δ dans K, donc dans T. Par ailleurs, $\bigcap_{n\in\omega} A_n \cap \bigcap_{n\in\omega} f_n^{-1}(K)$ est G_δ dense de Z, puisque les fonctions f_n sont continues et ouvertes. Donc on trouve x dans ce G_δ, et E_x est polonais, puisque c'est une coupe verticale de $(Z \times K) \cap (u \times v)^{-1}(A)$ intersectée avec $\overline{E_x}$. De plus E_x est dénombrable, non vide et sans point isolé, ce qui est contradictoire.

Inversement, on peut supposer, pour simplifier l'écriture, que X et Y sont récursivement présentés, et que A est Δ_1^1-réunion de graphes Δ_1^1. Désignons par W^X un ensemble $\Pi_1^1 \subseteq \omega$ de codes pour les Δ_1^1 de X, et par $C^X \subseteq \omega \times X$ un ensemble Π_1^1 dont les sections aux points de W^X décrivent les Δ_1^1 de X, et tel que la relation ($n \in W^X$ et $(n, x) \notin C^X$) soit Π_1^1 (cf. **[Lo1]**). Soit également $W \subseteq W^{X\times Y}$ un ensemble Π_1^1 de codes pour les $\Delta_1^1 \cap pot(\mathbf{\Sigma}_2^0)$ de $X \times Y$ (dont l'existence est démontrée dans **[Lo2]**). Posons :

$H := \bigcup\{(E \times F) \setminus A \ / \ E, F \in \Delta_1^1$ et $(E \times F) \setminus A \in pot(\mathbf{\Sigma}_2^0)\}$; on a

$$\begin{aligned} H(x, y) \Leftrightarrow \ & \exists\, n \in W \ \exists\, m \ : \ (m)_0 \in W^X \text{ et } (m)_1 \in W^Y \text{ et } \forall z \, \forall t \\ & [(n \in W^{X\times Y} \text{ et } (n, z, t) \notin C^{X\times Y}) \text{ ou } \{((m)_0, z) \in C^X \text{ et } ((m)_1, t) \in C^Y \\ & \text{et}(z, t) \notin A\}] \text{ et } [((m)_0 \in W^X \text{ et } ((m)_0, z) \notin C^X) \\ & \text{ou } ((m)_1 \in W^Y \text{ et } ((m)_1, t) \notin C^Y) \text{ ou } (z, t) \in A \text{ ou } (n, z, t) \in C^{X\times Y}] \\ & \text{et } ((m)_0, x) \in C^X \text{ et } ((m)_1, y) \in C^Y \text{ et } (x, y) \notin A. \end{aligned}$$

Donc H est Π_1^1. Posons $N := \check{A} \cap \check{H}$; N est Σ_1^1 et G_δ de $X \times Y$ muni de la topologie $\Delta_X \times \Delta_Y$ (cf. **[Lo2]**). Posons $D_X := \{x \in X \ / \ x \notin \Delta_1^1\}$, $\Omega_X := \{x \in X \ / \ \omega_1^x = \omega_1^{CK}\}$, et $Z_0 := \Omega_X \cap D_X$, $T := \Omega_Y \cap D_Y$. On munit Z_0 (resp. T) de la restriction de la topologie de Gandy-Harrington sur X (resp. Y), de sorte que Z_0 et T sont polonais parfaits de dimension 0. On montre maintenant la propriété qui sera la clef de la construction à venir :

Si U (resp. V) est Σ_1^1 et inclus dans Z_0 (resp. T), et si $N \cap (U \times V) \neq \varnothing$, alors $A \cap \overline{N \cap (U \times V)}^{Z_0 \times T}$ est un sous-Σ_1^1 non vide de $U \times V$.

En effet, U (resp. V) est ouvert-fermé de Z_0 (resp. T), donc

$$\overline{N \cap (U \times V)}^{Z_0 \times T} \subseteq U \times V ;$$

A, Z_0, T, N, U, et V sont Σ_1^1, donc $A \cap \overline{N \cap (U \times V)}^{Z_0 \times T}$ aussi, l'adhérence d'un Σ_1^1 pour le produit des topologies de Gandy-Harrington restant Σ_1^1, par double application du théorème de séparation. Posons $O := N \cap (U \times V)$.

Supposons que $A \cap \overline{O}^{\Sigma_X \times \Sigma_Y} = \varnothing$. Alors, par double application du théorème de séparation, $A \cap \overline{O}^{\Delta_X \times \Delta_Y} = \varnothing$, donc on a la triple inclusion : $(U \times V) \setminus A \subseteq O \cup H \subseteq \overline{O}^{\Delta_X \times \Delta_Y} \cup H \subseteq \check{A}$. Donc $(U \times V) \setminus A$ et A sont deux Σ^1_1 séparables par un $pot(\mathbf{\Sigma}^0_2)$; ils peuvent par conséquent être séparés par un ensemble $K \in \Delta^1_1 \cap pot(\mathbf{\Sigma}^0_2)$ (cf **[Lo2]**). On a $U \times V \subseteq K \cup A$, donc on peut trouver $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$, deux Δ^1_1 tels que $U \times V \subseteq \mathscr{U} \times \mathscr{V} \subseteq K \cup A$. On a donc $(\mathscr{U} \times \mathscr{V}) \setminus A \subseteq H$, puis $O \subseteq H \setminus H = \varnothing$, ce qui est absurde. On a donc que $A \cap \overline{O}^{\Sigma_X \times \Sigma_Y} \neq \varnothing$. Or $O \subseteq D_X \times D_Y$, donc $\overline{O}^{\Sigma_X \times \Sigma_Y} \subseteq D_X \times D_Y$. Donc $(D_X \times D_Y) \cap A \cap \overline{O}^{\Sigma_X \times \Sigma_Y} \neq \varnothing$ et est Σ^1_1, donc rencontre $\Omega_{X \times Y} \subseteq \Omega_X \times \Omega_Y$, donc $(Z_0 \times T) \cap A \cap \overline{O}^{\Sigma_X \times \Sigma_Y} \neq \varnothing$.

Soit d_1 (resp. d_2) une distance $\leq 1/2$ qui rende Z_0 (resp. T) complet, et d la distance sur $Z \times T$ définie par $d((x, y), (z, t)) := d_1(x, z) + d_2(y, t)$. Soit d' une distance ≤ 1 sur $N \cap (Z_0 \times T)$, qui le rende complet (c'est un G_δ de $Z_0 \times T$, donc un espace polonais). On vérifie sans peine que si on pose $d'_x(y, t) := d'((x, y), (x, t))$, alors $(N_x \cap T, d'_x)$ est métrique complet. On pose, si s est une suite finie d'entiers non nuls, $\nu(s) := \sum_{i<|s|} s(i)$ ($\nu(\varnothing) = 0$).

On construit, par récurrence sur $|s|$, des ouverts non vides de Z_0, $\mathscr{A}_s$, des G_δ denses $\mathscr{G}_s$ de $\mathscr{A}_s$, des applications continues et ouvertes $g_s : \mathscr{A}_s \longrightarrow T$, des ouverts à coupes verticales ouvertes-fermées de $Z_0 \times T$, ω_s, et des ouverts de $N \cap (Z_0 \times T)$, G_s, tels que :

(a) $Gr(g_s) \subseteq A \cap \omega_s \cap \overline{G_s}^{Z_0 \times T}$

(b) $\omega_{s^\frown n} \subseteq \omega_s$, $\omega_{s^\frown n} \cap \omega_{s^\frown m} = \varnothing$ si $n \neq m$

(c) $\forall\, x \in Z_0\ \overline{G^x_{s^\frown n}}^T \cap N_x \subseteq G^x_s \subseteq \omega^x_s$

(d) $\mathscr{A}_s \Delta \mathscr{A}_{s^\frown n}$ est maigre et $\forall\, x \in \mathscr{A}_{s^\frown n} \cap \mathscr{G}_s\ d_2(g_s(x), g_{s^\frown n}(x)) \leq 2^{1-\nu(s^\frown n)}$

(e) $\forall\, x \in Z_0\ \delta_2(\omega^x_s) \leq 2^{-\nu(s)}$

(f) $\forall\, x \in Z_0\ \delta'_x(G^x_s) \leq 2^{-|s|}$.

On pose $\omega_\varnothing := Z_0 \times T$, $G_\varnothing := (Z_0 \times T) \cap N$. L'ensemble $G_\varnothing$ est non vide. En effet, N rencontre $D_X \times D_Y$, sinon N serait $pot(\mathbf{\Delta}^0_1)$ et $A \cup H$ aussi, donc $A = (A \cup H) \cap \check{H}$ serait $pot(\mathbf{\Pi}^0_2)$, ce qui est exclus. Donc $N \cap (D_X \times D_Y)$, qui est Σ^1_1, rencontre $\Omega_{X \times Y} \subseteq \Omega_X \times \Omega_Y$ et $G_\varnothing \neq \varnothing$. Par la propriété-clef, $A \cap \overline{G_\varnothing}^{Z_0 \times T}$ est un sous-Σ^1_1 non vide de $\omega_\varnothing$, donc $A \cap \omega_\varnothing \cap \overline{G_\varnothing}^{Z_0 \times T}$ est réunion de graphes Σ^1_1 dont l'un, disons $Gr(g_\varnothing)$, est non vide. Il reste à appeler $\mathscr{A}_\varnothing$ le domaine de $g_\varnothing$ pour terminer la construction au premier cran. Admettons donc avoir construit $\mathscr{A}_s$, g_s, ω_s, G_s pour $|s| \leq p$ et $\mathscr{G}_s$ pour $|s| < p$ vérifiant (a)–(f), et soit s de longueur p.

On commence par construire, par récurrence sur n, les $\omega_{s^\frown n}$, une suite décroissante (E_n) de G_δ denses de $\mathscr{A}_s$, des applications continues $h_n : E_n \longrightarrow T$, et des ouverts V_n de $Z_0 \times T$ tels que :

(1) $Gr(h_n) \subseteq \omega_{s^\frown n} \cap G_s$

(2) $\omega_{s^\frown n} \subseteq \omega_s$ et $\omega_{s^\frown n} \cap \omega_{s^\frown m} = \varnothing$ si $n \neq m$

(3) $\forall\, x \in E_n\ d_2(h_n(x), g_s(x)) < 2^{-\nu(s^\frown n)}$

(4) $\forall\, x \in Z_0\ \delta_2(\omega^x_{s^\frown n}) < 2^{-\nu(s^\frown n)}$

(5) $Gr(g_s \lceil E_n) \subseteq V_n \subseteq {}^c(\bigcup_{1 \leq m \leq n} \omega_{s^\frown m})$.

Admettons avoir construit ces objets pour $1 \leq m \leq n$, ce qui est fait pour $n = 0$. Soit x un élément de $\mathscr{A}_s$. Comme g_s est continue en x, on trouve un voisinage ouvert U_x de x contenu dans $\mathscr{A}_s$ tel que si $z \in U_x$, $d_2(g_s(x), g_s(z)) < \varepsilon := 2^{-\nu(s^\frown(n+1))-1}$. De telle façon que si $(z, t) \in U_x \times \mathscr{B}(g_s(x), \varepsilon)$, on a $d_2(t, g_s(z)) < 2^{-\nu(s^\frown(n+1))}$. Posons $\mathscr{U}_{n+1} := V_n \cap \bigcup_{x \in \mathscr{A}_s} U_x \times \mathscr{B}(g_s(x), \varepsilon)$, et soit O_n un ouvert dense de $\mathscr{A}_s$ contenant E_n tel que $Gr(g_s) \cap V_n = Gr(g_s \lceil O_n)$. Soit k_{n+1} une fonction Baire-mesurable uniformisant $\mathscr{U}_{n+1} \cap \omega_s \cap G_s$ sur sa projection Π qui est un ouvert de Z_0, et soit F_{n+1} un G_δ dense de Π sur lequel la restriction de k_{n+1} est continue. Alors $O_n \setminus F_{n+1}$ est maigre car $O_n \cap \Pi$ est ouvert dense de O_n ; en effet, si U est ouvert non vide de O_n et $x \in U$, $(x, g_s(x)) \in (U \times T) \cap \omega_s \cap \mathscr{U}_{n+1}$. Donc, comme $Gr(g_s) \subseteq \overline{G_s}^{Z_0 \times T}$, on trouve (z, t) dans $G_s \cap (U \times T) \cap \omega_s \cap \mathscr{U}_{n+1}$, et $z \in U \cap \Pi$. De tout ceci résulte que $\mathscr{A}_s \setminus F_{n+1}$ est maigre, donc $E_{n+1} := F_{n+1} \cap E_n$ est G_δ dense de $\mathscr{A}_s$ et $h_{n+1} := k_{n+1} \lceil E_{n+1}$ est continue. Si $x \in E_{n+1}$, $(x, h_{n+1}(x)) \in \mathscr{U}_{n+1}$, donc $d_2(h_{n+1}(x), g_s(x)) < 2^{-\nu(s^\frown(n+1))}$. Dans $E_{n+1} \times T$, $Gr(h_{n+1})$ et $Gr(g_s \lceil E_{n+1})$ sont deux fermés disjoints, donc séparables par un ouvert-fermé θ. Par la propriété de réduction des ouverts, on trouve donc deux ouverts disjoints de $Z_0 \times T$, $\mathscr{T}$ et $\mathscr{W}$ tels que $\theta = \mathscr{T} \cap (E_{n+1} \times T)$, et $(E_{n+1} \times T) \setminus \theta = \mathscr{W} \cap (E_{n+1} \times T)$. Comme $Gr(h_{n+1}) \subseteq \mathscr{T}$, on trouve pour chaque x dans E_{n+1} un rectangle ouvert-fermé $V_x \times W_x$ tel que $(x, h_{n+1}(x)) \in V_x \times W_x \subseteq \mathscr{T} \cap \omega_s \cap V_n$, $\delta_2(W_x) < 2^{-\nu(s^\frown(n+1))}$, et $E_{n+1} \cap V_x \subseteq h_{n+1}^{-1}(W_x)$. On a $\bigcup_{x \in E_{n+1}} V_x \times W_x = \bigcup_{p \in \omega} V_p \times W_p$, par Lindelöf. Réduisons la suite (V_p) en (V'_p) ; on peut alors poser

$$\omega_{s^\frown(n+1)} := \bigcup_{p \in \omega} V'_p \times W_p \text{ et } V_{n+1} := V_n \cap \mathscr{W},$$

comme on le vérifie facilement.

Revenons à la construction principale ; on a déjà assuré (b) et (e). Si $x \in E_n$, on peut trouver un ouvert-fermé de N, $\mathscr{U}_x := (\mathscr{V}_x \times \mathscr{W}_x) \cap N$, de diamètre au plus $2^{-|s|-1}$ pour d', vérifiant $\mathscr{V}_x \cap E_n \subseteq h_n^{-1}(\mathscr{W}_x)$, et si Z_s est ouvert de $Z_0 \times T$ tel que $G_s = Z_s \cap N$, on ait $(x, h_n(x)) \in \mathscr{V}_x \times \mathscr{W}_x \subseteq \omega_{s^\frown n} \cap Z_s \cap (\mathscr{A}_s \times T)$. On a donc que $Gr(h_n) \subseteq \bigcup_{x \in E_n} \mathscr{U}_x = \bigcup_{m \in \omega} \mathscr{U}_m$, par Lindelöf. On réduit la suite $(\mathscr{V}_m)$ en $(\mathscr{V}'_m)$, et on pose $G_{s^\frown n} := \bigcup_{m \in \omega} (\mathscr{V}'_m \times \mathscr{W}_m) \cap N$, et les conditions (c) et (f) sont réalisées, puisque $G^x_{s^\frown n}$ est vide ou l'un des $\mathscr{W}_m \cap N_x$, donc est ouvert-fermé de N_x. De plus, on a $G_{s^\frown n} \supseteq Gr(h_n)$. A l'aide d'une nouvelle numérotation, on peut écrire $G_{s^\frown n} = \bigcup_{p \in \omega} (L_p \times M_p) \cap N$, L_p et M_p étant deux Σ^1_1. Posons $E_{n,p} := A \cap \overline{N \cap (L_p \times M_p)}^{Z_0 \times T} \cap \omega_{s^\frown n}$; $E_{n,p}$ est réunion de graphes Σ^1_1. On peut donc trouver une suite de graphes Σ^1_1, contenus dans $E_{n,p}$, dont les domaines sont deux à deux disjoints, et tels que la réunion de ces domaines, disons $O_{n,p}$, forme un ouvert tel que $\bigcup_{q \leq p} O_{n,q}$ soit dense dans $\bigcup_{q \leq p} \Pi''_X E_{n,p}$ (une telle construction est possible avec le lemme de Zorn, par exemple). On fait ceci par récurrence sur p, de sorte que $\mathscr{A}_{s^\frown n} := \bigcup_{p \in \omega} O_{n,p}$ est un ouvert dense de $\bigcup_{p \in \omega} \Pi''_X E_{n,p}$. On appelle $g_{s^\frown n}$ le recollement des fonctions définies sur les $O_{n,p}$, et la condition $a)$ est satisfaite, ainsi que la seconde partie de la condition (d), si on pose $\mathscr{G}_s := \bigcap_{n \geq 1} E_n$, par (4). Reste à voir que $\mathscr{A}_s \Delta \mathscr{A}_{s^\frown n}$ est maigre pour clore la construction. Quitte à remplacer $\mathscr{A}_{s^\frown n}$ par $\mathscr{A}_s \cap \mathscr{A}_{s^\frown n}$, il suffit de voir que $\mathscr{A}_s \setminus \mathscr{A}_{s^\frown n}$ est maigre. Posons $\Pi_p := \Pi''_X (L_p \times M_p) \cap N$ et $\Pi'_p := \Pi''_X E_{n,p}$. On a:

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_s \setminus \mathscr{A}_{s\frown n} &\subseteq \mathscr{A}_s \setminus (\bigcup_{p\in\omega} \Pi'_p) \cup \bigcup_{p\in\omega} \Pi'_p \setminus \mathscr{A}_{s\frown n}\\ &\subseteq \mathscr{A}_s \setminus E_n \cup E_n \setminus (\bigcup_{p\in\omega} \Pi'_p) \cup \bigcup_{p\in\omega} \Pi'_p \setminus \mathscr{A}_{s\frown n}\\ &\subseteq \mathscr{A}_s \setminus E_n \cup \bigcup_{p\in\omega} \Pi_p \setminus \Pi'_p \cup \bigcup_{p\in\omega} \Pi'_p \setminus \mathscr{A}_{s\frown n}\end{aligned}$$

Il suffit donc de voir que $\Pi_p \cap \Pi'_p$ est ouvert dense de Π_p ; mais ceci est une conséquence facile de la propriété clef.

On définit maintenant les objets recherchés : $Z := \mathscr{A}_\varnothing$, u et v sont les injections canoniques. Soit $\varphi : \omega \longrightarrow (\omega \setminus \{0\})^{<\omega} \times \omega$ bijective, et $(U^s_m)_m$ une suite d'ouverts denses de $\mathscr{A}_s$ telle que $\mathscr{G}_s = \bigcap_{m\in\omega} U^s_m$. On pose $A_n := \mathscr{A}_\varnothing \cap U^{\varphi_0(n)}_{\varphi_1(n)}$ et $f_n := g_{\varphi_0(n)} \lceil A_n$. L'ouvert A_n est dense dans Z par la première partie de (d), et E_x est sans point isolé par la seconde partie de (d) (on a $\bigcap_{n\in\omega} A_n = \bigcap_{s\in(\omega\setminus\{0\})^{<\omega}} \mathscr{G}_s$).

La fin de la preuve est semblable à la preuve du théorème d'Hurewicz dans **[SR]**. Posons, si $x \in \bigcap_{n\in\omega} A_n$, $M_k := \{g_s(x) \ / \ |s| \leq k\}$. Alors M_k est fermé dans T, par récurrence sur k : si $M^\varepsilon_k := \{y \in T \ / \ d_2(y, M_k) \leq \varepsilon\}$, on a $M_{k+1} = \bigcap_{\varepsilon>0}[M^\varepsilon_k \cup (M_{k+1} \setminus M^\varepsilon_k)]$, et $M_{k+1} \setminus M^\varepsilon_k$ est fini, par (d).

Si $k \in \omega$ et $y \in \overline{E_x} \setminus E_x$, $y \notin M_k$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $y \notin M^\varepsilon_k$. Si $s \in (\omega \setminus \{0\})^k$ et $(x, t) \in \omega_s$, $d_2(t, M_k) \leq d_2(t, g_s(x)) \leq \delta_2(\omega^x_s) \leq 2^{-\nu(s)} \leq \varepsilon$ dès que $\nu(s) \geq k_0$, donc $\omega^x_s \subseteq M^\varepsilon_k$, sauf pour un nombre fini de s dans $(\omega \setminus \{0\})^k$. Donc si $\mathscr{H} := \{s \in (\omega \setminus \{0\})^k \ / \ \omega^x_s \not\subseteq M^\varepsilon_k\}$, on a $E_x = M_k \cup \{g_s(x) \ / \ |s| > k\} \subseteq M_k \cup \bigcup_{|t|>k} \omega^x_t \subseteq M_k \cup \bigcup_{|s|=k} \omega^x_s \subseteq M^\varepsilon_k \cup \bigcup_{s\in\mathscr{H}} \omega^x_s$ et $\overline{E_x} \subseteq M^\varepsilon_k \cup \bigcup_{s\in\mathscr{H}} \omega^x_s \subseteq M^\varepsilon_k \cup \bigcup_{|s|=k} \omega^x_s$. Donc on trouve une unique suite σ dans $(\omega \setminus \{0\})^\omega$ telle que $y \in \bigcap_{s\prec\sigma} \omega^x_s$. La suite décroissante de fermés non vides dont les diamètres tendent vers 0 de $(N_x \cap T, d'_x)$, $(\overline{G^x_s} \cap N_x)_{s\prec\sigma}$, converge vers $\xi \in N_x \cap T$, et $\{\xi\} = \bigcap_{s\prec\sigma} G^x_s$. D'où $\xi \in \bigcap_{s\prec\sigma} \omega^x_s = \{y\}$ et $(x, y) \in N \subseteq \check{A}$. Posons

$$h : \begin{cases} (\omega \setminus \{0\})^\omega \longrightarrow T \\ \qquad \sigma \longmapsto \bigcap_{s\prec\sigma} \overline{G^x_s} \end{cases}$$

La fonction h est bien définie, à valeurs dans $N_x \subseteq \check{E}_x$. Si $\sigma \in (\omega \setminus \{0\})^\omega$, $h(\sigma) \in \bigcap_{s\prec\sigma} \omega^x_s$ et $\omega^x_s \cap E_x \neq \varnothing$; par conséquent, h est à valeurs dans $\overline{E_x}$. On a vu que $\overline{E_x} \setminus E_x \subseteq h''(\omega \setminus \{0\})^\omega$. Par (b), h est injective, et par (e), h est continue. Comme $h''N_s = \omega^x_s \cap (\overline{E_x} \setminus E_x)$, h est bien un homéomorphisme de $(\omega \setminus \{0\})^\omega$ sur $\overline{E_x} \setminus E_x$. □

Avec ce résultat et le théorème 2.3, on a, pour chaque classe de Wadge Γ non auto-duale, un test pour dire si un borélien à coupes dénombrables est $pot(\Gamma)$ (en effet, un tel borélien est $pot(F_\sigma)$).

REFERENCES

[D-SR] G. Debs and J. Saint Raymond, *Selections boréliennes injectives*, Amer. J. Math. **111** (1989), 519–534.

[GM] S. Graf and R. D. Mauldin, *Measurable one-to-one selections and transition kernels*, Amer. J. Math. **107** (1985), 407–425.

[HKL] L. A. Harrington, A. S. Kechris and A. Louveau, *A Glimm-Effros dichotomy for Borel equivalence relations*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 903–928.

[Ke] A. S. Kechris, *Measure and category in effective descriptive set theory*, Ann. of Math. Logic **5** (1973), 337–384.

[Ku] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. 1, Academic Press, New York and London, 1966.

[Le1] D. Lecomte, *Classes de Wadge potentielles et théorèmes d'uniformisation partielle*, Fund. Math. **143** (1993), 231–258.

[Le2] ——, *Classes de Wadge potentielles des boréliens à coupes dénombrables*, C. R Acad. Sci. Paris Sér. I **317** (1993), 1045–1048.

[Lo1] A. Louveau, *Livre à paraître.*

[Lo2] ——, *Ensembles analytiques et boréliens dans les espaces produit*, Astérisque (S. M. F.) **78** (1980).

[Lo-SR] A. Louveau and J. Saint Raymond, *Borel classes and closed games : Wadge-type and Hurewicz type results*, Trans. Amer. Math. Soc. **304** (1987), 431–467.

[Ma] R. D. Mauldin, *One-to-one selections, marriage theorems*, Amer. J. Math. **104** (1982), 823–828.

[Mo] Y. N. Moschovakis, *Descriptive set theory*, North-Holland, 1980.

[O] J. C. Oxtoby, *Measure and category*, Springer-Verlag, 1971.

[S] J. R. Steel, *Analytic sets and Borel isomorphisms*, Fund. Math. **108** (1980), 83–88.

[SR] J. Saint Raymond, *La structure borélienne d'Effros est-elle standard*, Fund. Math. **100** (1978), 201–210.

[W] W. W. Wadge, Thesis, Berkeley, 1984.

EQUIPE D'ANALYSE UNIVERSITE PARIS 6 BOITE 1864, PLACE JUSSIEU 75 252 PARIS CEDEX 05, FRANCE